Kvadratinis daugianaris

Teorija, užduotys, atsakymai, užuominos ir sprendimai

Andrius Berniukevičius

Vilniaus licėjus

Turinys

1 tema. Kvadratinis daugianaris: apibrėžimas, koeficientai, reikšmės **4**
Teorija (minčių žemėlapis) . . . 4
Užduotys . . . 5
Atsakymai . . . 8
Užuominos . . . 9
Sprendimai . . . 10

2 tema. Pilnojo kvadrato išskyrimas **11**
Teorija (minčių žemėlapis) . . . 11
Užduotys . . . 12
Atsakymai . . . 15
Užuominos . . . 16
Sprendimai . . . 17

3 tema. Mažiausia ir didžiausia reikšmė (ekstremumas) **18**
Teorija (minčių žemėlapis) . . . 18
Užduotys . . . 19
Atsakymai . . . 22
Užuominos . . . 23
Sprendimai . . . 24

4 tema. Diskriminantas ir ekstremumo formulės **26**
Teorija (minčių žemėlapis) . . . 26
Užduotys . . . 27
Atsakymai . . . 30
Užuominos . . . 31
Sprendimai . . . 32

5 tema. Simetriškos reikšmės **34**
Teorija (minčių žemėlapis) . . . 34
Užduotys . . . 35
Atsakymai . . . 38
Užuominos . . . 39
Sprendimai . . . 40

6 tema. Kvadratinio daugianario šaknys **42**
Teorija (minčių žemėlapis) . . . 42
Užduotys . . . 43
Atsakymai . . . 46
Užuominos . . . 47
Sprendimai . . . 48

7 tema. Vijeto teorema **50**
Teorija (minčių žemėlapis) . . . 50
Užduotys . . . 51
Atsakymai . . . 54
Užuominos . . . 55
Sprendimai . . . 56

8 tema. Atvirkštinė Vijeto teorema **58**
Teorija (minčių žemėlapis) 58
Užduotys 59
Atsakymai 62
Užuominos 63
Sprendimai 64

9 tema. Kvadratinio daugianario skaidymas dauginamaisiais **66**
Teorija (minčių žemėlapis) 66
Užduotys 67
Atsakymai 70
Užuominos 71
Sprendimai 72

10 tema. Kvadratinio daugianario ženklai **74**
Teorija (minčių žemėlapis) 74
Užduotys 75
Atsakymai 78
Užuominos 79
Sprendimai 80

Kvadratinis daugianaris

1 tema: apibrėžimas, koeficientai, reikšmės

1. Apibrėžimas

Reiškinys

$$ax^2+bx+c, \qquad a,b,c\in\mathbb{R}, \qquad a\neq 0$$

vadinamas **kvadratiniu** (antrojo laipsnio) **daugianariu**; x – kintamasis. Žymime $P(x)$, $Q(x)$, ...

Kvadratiniai	**Nekvadratiniai**
✓ $3x^2-x+5$	✗ $5x+1$ $(a=0)$
✓ x^2-4 $(b=0)$	✗ x^3+x^2 (yra x^3)
✓ $-2x^2$ $(b=c=0)$	✗ $\frac{1}{x^2}+1$ (x vardiklyje)

Būtina tik $a\neq 0$! Koeficientai b ir c gali būti ir 0.

2. Koeficientai

$$P(x)=\underset{\text{vyriausiasis koeficientas}}{a}x^2+\underset{\text{koeficientas prie } x}{b}x+\underset{\text{laisvasis narys}}{c}$$

Skaičiai (ženklas priklauso koeficientui!):

$2x^2-3x+1 \Rightarrow a=2, b=-3, c=1$

$x^2-5 \Rightarrow a=1, b=0, c=-5$

$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\sqrt{2}, c=0$

Reiškiniai (m, k – parametrai, ne kintamieji):

$(m-1)x^2+2mx+m^2 \Rightarrow a=m-1, b=2m, c=m^2$

$kx^2-(k+3)x+4 \Rightarrow a=k, b=-(k+3), c=4$

Pirmasis kvadratinis, tik kai $a\neq 0$, t. y. $m\neq 1$.

Kvadratinis daugianaris

$P(x)=ax^2+bx+c, \qquad a\neq 0$

3. Standartinis pavidalas

Užrašas $\boxed{ax^2+bx+c}$: kiekvienas laipsnis įeina **vieną kartą**, nariai išdėstyti tvarka: x^2, x, laisvasis narys. Koeficientus skaitome **tik** iš šio pavidalo.

Kaip gauti: ① atskliausti ② sutraukti panašiuosius narius ③ išdėstyti.

$3-x+x^2=x^2-x+3 \qquad a=1, b=-1, c=3$

$(x-1)(2x+3)-x=2x^2+x-3-x=2x^2-3$

$a=2, b=0, c=-3$

$(m+1)x^2+mx-x=(m+1)x^2+(m-1)x$

$a=m+1, b=m-1, c=0$

$(x+2)^2-x^2=x^2+4x+4-x^2=4x+4$

✗ nekvadratinis (x^2 išnyko)!

4. Ką reiškia $P(2)$, $P(a+2)$?

$P(\square)$ – daugianario **reikšmė**: **kiekvieną** x pakeičiame tuo, kas parašyta **skliaustuose** (ir rašome skliaustus!).

Tegul $P(x)=x^2-3x+2$.

$P(2)=2^2-3\cdot 2+2=0$ (kai $x=2$, reikšmė 0)

$P(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)+2=6$

Visada, kai $P(x)=ax^2+bx+c$:

$P(0)=c, \qquad P(1)=a+b+c, \qquad P(-1)=a-b+c$

$P(a+2)=(a+2)^2-3(a+2)+2$

$=a^2+4a+4-3a-6+2=a^2+a$

$P(2x)=(2x)^2-3\cdot 2x+2=4x^2-6x+2$

Dėmesio: $P(2)$ – ne „P kart 2“

$P(-1)\neq -P(1)$ $\qquad$ $P(a+2)\neq P(a)+2$

5. Žinomos trys reikšmės ⇒ randame a, b, c

Užduotis. Raskite $P(x)=ax^2+bx+c$, jei

$P(1)=4, \qquad P(-1)=6, \qquad P(2)=9.$

Idėja: kiekviena reikšmė – tai lygtis su nežinomaisiais a, b, c.

① Įrašome $x=1$, $x=-1$, $x=2$:

$$\begin{cases} a+b+c=4 & (1)\\ a-b+c=6 & (2)\\ 4a+2b+c=9 & (3)\end{cases}$$

② Sprendžiame sistemą (atimame lygtis):

(1) – (2): $2b=-2 \Rightarrow b=-1$

(3) – (1): $3a+b=5 \Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$

iš (1): $c=4-a-b=4-2+1=3$

③ **Atsakymas:** $\boxed{P(x)=2x^2-x+3}$

④ Patikra: $P(2)=2\cdot 4-2+3=9$ ✓

Patarimas: jei žinoma $P(0)$, iš karto $c=P(0)$ – lieka dvi lygtys. Trys reikšmės koeficientus nusako **vienareikšmiškai**.

Kvadratinis daugianaris

1 tema: kvadratinis daugianaris – 30 užduočių

Visur $P(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$. $P(\square)$ – daugianario reikšmė, kai vietoj *kiekvieno* x įrašome tai, kas skliaustuose.

1. Atpažink Kurie reiškiniai yra kvadratiniai daugianariai? Pagrįskite.

a) $3x^2 - x + 1$ **c)** $x(x-4)$ **e)** $-\frac{x^2}{2}$ **g)** $\frac{1}{x^2} + 3$

b) $5 - 2x$ **d)** $(x+1)^2 - x^2$ **f)** $x^3 - x^2 + 1$ **h)** $\sqrt{2}\,x^2 - \pi x$

2. Lentelė Užpildykite lentelę.

Daugianaris	a	b	c
$4x^2 - 7x + 2$			
$5 - x^2$			
$3x - x^2$			
$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - 1$			
	-2	0	7
	$\frac{1}{3}$	-1	0

3. Geometrija Stačiakampio kraštinių ilgiai $x+2$ ir $2x-1$ ($x > \frac{1}{2}$). Jo plotą pažymėkime $S(x)$.

a) Užrašykite $S(x)$ standartiniu pavidalu ir nurodykite a, b, c.

b) Apskaičiuokite $S(3)$ ir patikrinkite, sudauginę kraštinių ilgius.

4. Standartinis pavidalas Užrašykite standartiniu pavidalu ir nurodykite koeficientus. Ar visi gauti reiškiniai yra kvadratiniai daugianariai?

a) $(2x-1)(x+3)$ **b)** $(x-2)^2 - 3x(x-1)$ **c)** $(x+1)(x-1) - (x-1)^2$

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite kiekvieną atsakymą.

a) Reiškinys $x^2 + bx + c$ yra kvadratinis daugianaris su bet kuriais b ir c.

b) Daugianario $5 - 3x^2$ vyriausiasis koeficientas lygus 5.

c) Daugianario $(x-3)^2$ laisvasis narys lygus -9.

d) Bet kurio kvadratinio daugianario $P(0) = c$.

6. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis reiškinys yra kvadratinis daugianaris?

a) $(m-2)x^2 + mx + 1$ **b)** $(m^2-9)x^2 + (m+3)x - 1$ **c)** $(m^2+1)x^2 - 2x + m$

7. Reikšmės Duota $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$. Apskaičiuokite $P(0)$, $P(-1)$, $P(2)$ ir $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. Rask klaidą Duota $P(x) = x^2 - 4x + 1$. Mokinys skaičiuoja:

$$P(-3) = -3^2 - 4 \cdot (-3) + 1 = -9 + 12 + 1 = 4.$$

Kur klaida? Apskaičiuokite teisingai.

9. Reiškinys skliaustuose Duota $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Raskite ir suprastinkite:

a) $P(a)$ **b)** $P(a-1)$ **c)** $P(2x)$ **d)** $P(-x)$

10. Palygink Duota $P(x) = x^2 - x$. Raskite $P(a+1)$ ir $P(a)+1$. Ar šie reiškiniai lygūs? Su kuriomis a reikšmėmis jų reikšmės sutampa?

11. Rask koeficientą Duota $P(x) = x^2 + bx + 4$ ir $P(2) = 0$. Raskite b.

12. Rask koeficientą Duota $P(x) = ax^2 - 3x + 1$ ir $P(-1) = 6$. Raskite a ir užrašykite daugianarį.

13. Sugretink Duota $P(x) = x^2 - 5x + 6$. Kiekvienam užrašui kairėje parinkite reikšmę dešinėje.

A) $P(0)$	1) 0
B) $P(1)$	2) 2
C) $P(-1)$	3) 6
D) $P(3)$	4) 12

14. Du nežinomieji Duota $P(x) = x^2 + bx + c$, $P(0) = -2$, $P(1) = 3$. Raskite b ir c.

15. Trys reikšmės Raskite $P(x) = ax^2 + bx + c$, jei $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ ir $P(-1) = 6$.

16. Lygčių sistema Raskite $P(x) = ax^2 + bx + c$, jei $P(1) = 2$, $P(2) = 7$ ir $P(3) = 16$. Atsakymą patikrinkite.

17. Ar egzistuoja? Ar yra *kvadratinis* daugianaris, kurio $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ ir $P(-1) = -1$? Pagrįskite.

18. Gudriai Apie $P(x) = ax^2 + bx + c$ žinoma: $P(1) = 5$, $P(-1) = 1$. Nežinodami a, b, c atskirai, raskite b ir sumą $a + c$.

19. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus kvadratinius daugianarius, kurių $P(0) = -3$ ir $P(1) = 0$. Kiek tokių daugianarių yra?

20. Iššūkis Duota $P(x) = (k+1)x^2 - 2kx + k - 3$.

a) Nurodykite koeficientus a, b, c. Su kuriomis k reikšmėmis $P(x)$ yra kvadratinis daugianaris?

b) Įrodykite, kad $P(1)$ nepriklauso nuo k. Ar gali būti $P(1) = 0$?

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Skirtumas Raskite kvadratinį daugianarį $P(x)$, jei su visais x teisinga lygybė $P(x+1) - P(x) = 2x + 3$ ir $P(0) = 1$.

22. Lygios reikšmės Duota $P(x) = x^2 + bx + c$, $P(1) = P(3)$ ir $P(0) = 5$. Raskite $P(2)$.

23. Lyginis daugianaris Duota $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir $P(-x) = P(x)$ su visais x.

a) Įrodykite, kad $b = 0$.

b) Raskite tokį $P(x)$, jei dar $P(1) = 3$ ir $P(2) = 9$.

24. Tapatybė Raskite visus kvadratinius daugianarius, kuriems su visais x teisinga lygybė $P(2x) = 4P(x)$.

25. Neatskliausk! Duota $P(x) = (x-3)(2x+5) - (x+1)^2$. Neatskliausdami raskite

a) koeficientų sumą $a + b + c$;

b) reiškinio $a - b + c$ reikšmę.

Tada atskliauskite ir patikrinkite.

26. Sveikieji skaičiai Žinoma, kad $P(0)$, $P(1)$ ir $P(2)$ – sveikieji skaičiai.

a) Ar būtinai a, b, c – sveikieji? Pateikite pavyzdį arba įrodykite.

b) Įrodykite, kad skaičiai c, $a+b$ ir $2a$ – sveikieji.

27. Ar egzistuoja? Ar yra kvadratinis daugianaris, kurio $P(1)=1$, $P(2)=4$, $P(3)=9$ ir $P(4)=17$?

28. Parametras Duota $P(x)=(m-1)x^2+(m+1)x+m$. Su kuriomis m reikšmėmis $P(x)$ yra kvadratinis daugianaris ir $P(1)=P(-1)$?

29. Daugianaris daugianaryje Duota $P(x)=x^2-2x$.

a) Apskaičiuokite $P(P(1))$ ir $P(P(P(1)))$.

b) Ar $P(P(x))$ yra kvadratinis daugianaris? Pagrįskite.

30. Iššūkis Raskite visus kvadratinius daugianarius, kuriems su visais x teisinga lygybė $P(x+1)=P(-x)$. Kuris iš jų tenkina sąlygas $P(0)=2$ ir $P(2)=6$?

Atsakymai

1. a), c), e), h).

2. $(a;\ b;\ c)$: $(4;\ -7;\ 2)$, $(-1;\ 0;\ 5)$, $(-1;\ 3;\ 0)$, $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ -1\right)$; $-2x^2+7$; $\frac{1}{3}x^2-x$.

3. a) $S(x)=2x^2+3x-2$; $a=2$, $b=3$, $c=-2$. b) $S(3)=25$.

4. a) $2x^2+5x-3$. b) $-2x^2-x+4$. c) $2x-2$ – ne kvadratinis.

5. a) T. b) K. c) K. d) T.

6. a) $m\neq 2$. b) $m\neq\pm 3$. c) Su visais m.

7. $-5;\ 0;\ -3;\ -6$.

8. $(-3)^2=9$, ne -9; $P(-3)=22$.

9. a) a^2+2a-3. b) a^2-4. c) $4x^2+4x-3$. d) x^2-2x-3.

10. a^2+a ir a^2-a+1; nelygūs; sutampa, kai $a=\frac{1}{2}$.

11. $b=-4$.

12. $a=2$; $2x^2-3x+1$.

13. A–3, B–2, C–4, D–1.

14. $b=4$, $c=-2$.

15. $2x^2-3x+1$.

16. $2x^2-x+1$.

17. Ne.

18. $b=2$, $a+c=3$.

19. Pvz., x^2+2x-3; be galo daug: $ax^2+(3-a)x-3$.

20. a) $a=k+1$, $b=-2k$, $c=k-3$; $k\neq -1$. b) $P(1)=-2$; ne.

21. $P(x)=x^2+2x+1$.

22. $P(2)=1$.

23. b) $P(x)=2x^2+1$.

24. $P(x)=ax^2$, $a\neq 0$.

25. a) -18. b) -12.

26. a) Ne, pvz., $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$.

27. Ne.

28. $m=-1$.

29. a) 3; 3. b) Ne.

30. $P(x)=ax^2-ax+c$; $2x^2-2x+2$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Užrašykite $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir atskliauskite $P(x+1) - P(x)$. Kada du daugianariai lygūs su *visais* x?

22. Užrašykite lygybę $P(1) = P(3)$ per b ir c – kai kas susiprastins.

23. a) Apskaičiuokite $P(-x) - P(x)$. b) Kadangi $b = 0$, lieka du nežinomieji.

24. Užrašykite $P(2x)$ ir $4P(x)$ ir palyginkite koeficientus prie x^2, prie x ir laisvuosius narius.

25. Kam lygi suma $a + b + c$, jei $P(x) = ax^2 + bx + c$? Įrašykite tinkamą x. O $a - b + c$?

26. a) Ieškokite tarp daugianarių su trupmeniniais koeficientais, pvz., tokio, kad $P(0) = P(1) = 0$. b) Išreikškite c, $a + b$ ir $2a$ per $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$.

27. Trys reikšmės visiškai nustato a, b, c. Raskite juos ir patikrinkite ketvirtąją reikšmę.

28. Apskaičiuokite $P(1)$ ir $P(-1)$. Nepamirškite sąlygos, kad daugianaris turi būti kvadratinis.

29. a) Skaičiuokite „iš vidaus į išorę“. b) Koks bus didžiausias x laipsnis, kai $x^2 - 2x$ pakelsite kvadratu?

30. Atskliauskite $P(x+1)$ ir $P(-x)$ ir sulyginkite koeficientus.

Sprendimai (21–30)

21. Tarkime, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Tada

$$P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c,$$

$$P(x+1) - P(x) = 2ax + (a+b).$$

Turi būti $2ax + (a+b) = 2x + 3$ su visais x, todėl koeficientai lygūs: $2a = 2$ ir $a + b = 3$, t. y. $a = 1$, $b = 2$. Be to, $c = P(0) = 1$. **Atsakymas:** $P(x) = x^2 + 2x + 1$.
Patikra: $(x+1)^2 + 2(x+1) + 1 - (x^2 + 2x + 1) = 2x + 3$ ✓

22. $P(1) = 1 + b + c$, $P(3) = 9 + 3b + c$. Iš $P(1) = P(3)$: $1 + b + c = 9 + 3b + c$, t. y. $-2b = 8$, $b = -4$. $c = P(0) = 5$. Taigi $P(x) = x^2 - 4x + 5$ ir $P(2) = 4 - 8 + 5 = 1$.

23. a) $P(-x) = ax^2 - bx + c$, todėl $P(-x) - P(x) = -2bx$. Šis skirtumas lygus 0 su visais x, taigi ir su $x = 1$: $-2b = 0$, $b = 0$.
b) $P(x) = ax^2 + c$: $P(1) = a + c = 3$, $P(2) = 4a + c = 9$. Atėmę: $3a = 6$, $a = 2$, $c = 1$. **Atsakymas:** $P(x) = 2x^2 + 1$.

24. $P(2x) = a(2x)^2 + b \cdot 2x + c = 4ax^2 + 2bx + c$, $4P(x) = 4ax^2 + 4bx + 4c$. Lygybė su visais x reiškia lygius koeficientus: $2b = 4b$ ir $c = 4c$, todėl $b = 0$, $c = 0$. **Atsakymas:** $P(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Patikra: $a(2x)^2 = 4ax^2$ ✓

25. a) $P(1) = a + b + c$, todėl koeficientų suma $= P(1) = (1-3)(2+5) - (1+1)^2 = -14 - 4 = -18$.
b) $P(-1) = a - b + c = (-1-3)(-2+5) - 0^2 = -12$.
Patikra: $P(x) = 2x^2 - x - 15 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 - 3x - 16$; $1 - 3 - 16 = -18$, $1 + 3 - 16 = -12$ ✓

26. a) Ne. Pavyzdžiui, $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$: $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(2) = 2 - 1 = 1$ – sveikieji, bet $a = \frac{1}{2}$.
b) $c = P(0)$ – sveikasis. $a + b = P(1) - c$ – dviejų sveikųjų skirtumas. Iš $P(2) = 4a + 2b + c$: $2a = P(2) - c - 2(a+b) = P(2) - 2P(1) + P(0)$ – sveikasis.

27. Gauname: $a + b + c = 1$, $4a + 2b + c = 4$, $9a + 3b + c = 9$. Atėmę gretimas lygtis: $3a + b = 3$, $5a + b = 5$, todėl $2a = 2$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Vienintelis daugianaris su tokiomis trimis reikšmėmis – $P(x) = x^2$, bet jo $P(4) = 16 \neq 17$. **Atsakymas:** tokio daugianario nėra.

28. Daugianaris kvadratinis, kai $m - 1 \neq 0$, t. y. $m \neq 1$. $P(1) = (m-1) + (m+1) + m = 3m$, $P(-1) = (m-1) - (m+1) + m = m - 2$. Iš $3m = m - 2$: $m = -1$ (tinka, nes $m \neq 1$). Patikra: $P(x) = -2x^2 - 1$, $P(1) = P(-1) = -3$ ✓

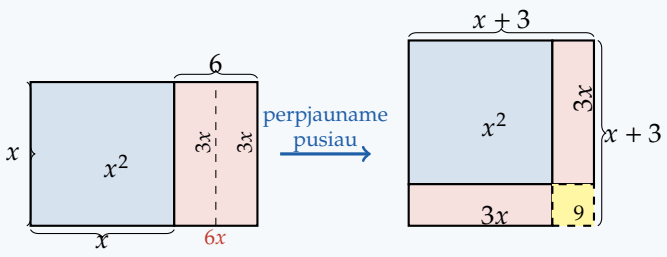
29. a) $P(1) = 1 - 2 = -1$, $P(-1) = 1 + 2 = 3$, $P(3) = 9 - 6 = 3$. Taigi $P(P(1)) = P(-1) = 3$, $P(P(P(1))) = P(3) = 3$.
b) $P(P(x)) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)$, o $(x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ – yra narys x^4. Todėl $P(P(x))$ – ketvirtojo laipsnio daugianaris, **ne** kvadratinis.

30. $P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$, $P(-x) = ax^2 - bx + c$. Sulyginame koeficientus. Prie x: $2a + b = -b$, t. y. $b = -a$; laisvieji nariai: $a + b + c = c$, t. y. $a + b = 0$ – ta pati sąlyga. Tinka visi daugianariai $P(x) = ax^2 - ax + c$, $a \neq 0$.
Iš $P(0) = c = 2$ ir $P(2) = 4a - 2a + 2 = 6$: $a = 2$. **Atsakymas:** $P(x) = 2x^2 - 2x + 2$.
Patikra: $P(x+1) = 2x^2 + 2x + 2 = P(-x)$ ✓

Kvadratinis daugianaris

2 tema: pilnojo kvadrato išskyrimas

1. Ką reiškia $x^2 + 6x$? (geometrija)



Juostą $6x$ perpjauname į dvi juostas $3x$ ir pridedame prie dviejų kraštinių. Iki kvadrato $(x+3)^2$ trūksta kampo $3 \cdot 3 = 9$:

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$$

Patikra: $(x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x$ ✓

2. Formulė ($a = 1$)

Su bet kuriuo b: juostą dalijame pusiau, trūksta kampo $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$\boxed{x^2 + bx = \left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2}\right)^2}$$

Kodėl teisinga (atskliaudžiame dešinę pusę):

$$\left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \tfrac{b^2}{4} - \tfrac{b^2}{4} = x^2 + bx \checkmark$$

Taisyklė: ① imame **pusę koeficiento prie** x (su ženklu); ② rašome $(x + \text{pusė})^2$; ③ **atimame pusės kvadratą**.

Atskliaudus $(x + \frac{b}{2})^2$ atsiranda $+\frac{b^2}{4}$, todėl jį atimame.

Pilnojo kvadrato išskyrimas

$$ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$$

3. Pavyzdžiai ($a = 1$)

Neigiamas b: -8 pusė yra -4

$$x^2 - 8x = (x-4)^2 - (-4)^2 = (x-4)^2 - 16$$

Nelyginis b: 3 pusė yra $\frac{3}{2}$

$$x^2 + 3x = \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}$$

Trupmeninis b: $\frac{3}{5}$ pusė yra $\frac{3}{10}$

$$x^2 + \tfrac{3}{5}x = \left(x + \tfrac{3}{10}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{10}\right)^2 = \left(x + \tfrac{3}{10}\right)^2 - \tfrac{9}{100}$$

Pusės kvadratas teigiamas: $(-4)^2 = 16$, todėl rašome -16.

4. Kai $a \neq 1$

Planas: ① iškeliame a ② išskiriame kvadratą ③ atskliaudžiame.

Be laisvojo nario:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 20x &= 2(x^2 + 10x) && ① \\ &= 2\big((x+5)^2 - 25\big) && ② \\ &= 2(x+5)^2 - 50 && ③ \end{aligned}$$

Su laisvuoju nariu (c paliekame nuošalyje):

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 1 &= 3(x^2 - 4x) + 1 && ① \\ &= 3\big((x-2)^2 - 4\big) + 1 && ② \\ &= 3(x-2)^2 - 12 + 1 && ③ \\ &= 3(x-2)^2 - 11 \end{aligned}$$

Dauginame ir $-\left(\frac{b}{2}\right)^2$: $3 \cdot (-4) = -12$, ne -4!

5. Bendras išvedimas (tie patys žingsniai su raidėmis), $a \neq 0$

a) $ax^2 + bx$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) && ① \\ &= a\left(\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2}\right) && ② \ \tfrac{b}{a} \text{ pusė yra } \tfrac{b}{2a} \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} && ③ \ a \cdot \tfrac{b^2}{4a^2} = \tfrac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

b) $ax^2 + bx + c$ (pridedame c prie a) rezultato)

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c \\ &= \boxed{a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2 - 4ac}{4a}} \end{aligned}$$

Pavidalas $a(x-h)^2 + k$, kur

$$h = -\frac{b}{2a}, \qquad k = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Patikra 4 šakos pavyzdžiu $3x^2 - 12x + 1$: $h = -\frac{-12}{6} = 2$, $k = 1 - \frac{144}{12} = -11 \Rightarrow 3(x-2)^2 - 11$ ✓

Kvadratinis daugianaris

2 tema: pilnojo kvadrato išskyrimas – 30 užduočių

Priminimas: $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Pilnojo kvadrato pavidalas: $a(x-h)^2 + k$.

1. Atpažink Kurie reiškiniai užrašyti pavidalu $a(x-h)^2 + k$? Šiems reiškiniams nurodykite a, h, k.

a) $(x-3)^2 + 5$ **c)** $(x-2)(x+2)$ **e)** $x^2 + 5$ **g)** $(x-1)^2 + (x+1)^2$

b) $2(x+1)^2 - 7$ **d)** $-(x+4)^2$ **f)** $3 - (x-1)^2$ **h)** $\frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$

2. Geometrija Kvadrato kraštinė x, šalia jo – stačiakampis, kurio kraštinės x ir 10.

a) Kaip šį stačiakampį perpjauti ir pridėti prie kvadrato, kad susidarytų „beveik kvadratas“?

b) Kokio ploto kvadratėlio trūksta iki didelio kvadrato? Užrašykite $x^2 + 10x$ pilnojo kvadrato pavidalu.

3. Užpildyk Įrašykite trūkstamus skaičius.

a) $x^2 + 8x = (x + \square)^2 - \square$ **c)** $x^2 + x = (x + \square)^2 - \square$

b) $x^2 - 12x = (x - \square)^2 - \square$ **d)** $x^2 - \frac{2}{3}x = (x - \square)^2 - \square$

4. Papildyk iki kvadrato Kokį skaičių reikia pridėti, kad gautume dvinario kvadratą? Užrašykite tą kvadratą.

a) $x^2 + 6x + \square$ **b)** $x^2 - 14x + \square$ **c)** $x^2 + 5x + \square$ **d)** $x^2 - x + \square$

5. Išskirk ($a = 1$) Užrašykite pavidalu $(x-h)^2 + k$.

a) $x^2 - 6x + 11$ **b)** $x^2 + 4x - 1$ **c)** $x^2 + 3x + 1$ **d)** $x^2 - 5x + 6$

6. Rask klaidą Mokinys rašo: $x^2 - 8x + 3 = (x-4)^2 + 16 + 3 = (x-4)^2 + 19$. Kur klaida? Užrašykite teisingai ir patikrinkite atskliausdami.

7. Rask klaidą ($a \neq 1$) Mokinys rašo: $2x^2 + 12x + 5 = 2(x^2 + 6x) + 5 = 2(x+3)^2 - 9 + 5 = 2(x+3)^2 - 4$. Raskite klaidą ir pataisykite.

8. Išskirk ($a \neq 1$) Užrašykite pavidalu $a(x-h)^2 + k$.

a) $3x^2 - 12x + 7$ **b)** $-x^2 + 6x - 2$ **c)** $2x^2 + 2x + 1$ **d)** $-2x^2 - 8x$

9. Atvirkščiai Atskliauskite ir užrašykite standartiniu pavidalu $ax^2 + bx + c$.

a) $2(x-3)^2 + 1$ **b)** $-(x+1)^2 + 4$ **c)** $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$

10. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Su bet kuriuo b galioja $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$.

b) Reiškinys $x^2 - 10x + 25$ yra dvinario kvadratas.

c) $(x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x$.

d) $2x^2 + 4x = 2(x+1)^2$.

11. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo pilnojo kvadrato pavidalą dešinėje.

A) $x^2 - 4x + 7$	1) $(x+2)^2 + 3$
B) $x^2 + 4x + 7$	2) $(x-2)^2 + 3$
C) $x^2 - 4x + 1$	3) $-(x-2)^2 - 3$
D) $-x^2 + 4x - 7$	4) $(x-2)^2 - 3$

12. Parametras Su kuriomis p reikšmėmis reiškinys yra dvinario kvadratas?

a) $x^2 + px + 16$ **b)** $9x^2 - 12x + p$

13. Raidiniai koeficientai Išskirkite pilnąjį kvadratą.

a) $x^2 + 2kx + 3$ **b)** $x^2 - (m+1)x$

14. Neatskliausk! Duota $P(x) = (x-3)^2 - 4$. Neatskliausdami apskaičiuokite $P(3)$, $P(5)$, $P(1)$ ir $P(3+t)$.

15. Rask koeficientus Raskite b ir c, jei:

a) $x^2 + bx + c = (x-5)^2 + 2$ **b)** $2x^2 + bx + c = 2(x+1)^2 - 3$

16. Su 1 tema Raskite $P(x) = x^2 + bx + c$, jei $P(0) = 3$ ir $P(1) = 0$. Užrašykite jį standartiniu ir pilnojo kvadrato pavidalais.

17. Rask nežinomuosius Su kuriais h ir c teisinga lygybė $(x+h)^2 - 7 = x^2 + 10x + c$?

18. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus kvadratinius daugianarius, kurių pilnojo kvadrato pavidale $h = 3$ ir $k = -2$. Užrašykite juos standartiniu pavidalu.

19. Gudriai Pažymėję $t = x^2$, išskirkite pilnąjį kvadratą: $x^4 + 4x^2 + 7$.

20. Iššūkis Įrodykite, kad su $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Formulę patikrinkite daugianariu $2x^2 - 8x + 3$: išskirkite pilnąjį kvadratą tiesiogiai ir pagal formulę.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Vienatinumas Įrodykite: jei $(x-h)^2 + k = (x-p)^2 + q$ su visais x, tai $h = p$ ir $k = q$.

22. Rask a, h, k Apie daugianarį $P(x) = a(x-h)^2 + k$ žinoma: $P(1) = P(5) = 7$ ir $P(3) = -1$. Raskite a, h, k.

23. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis reiškinys $x^2 + (m+2)x + m + 5$ yra dvinario kvadratas? Užrašykite tuos kvadratus.

24. Be trupmenų Užrašykite pavidalu $(px+q)^2 + r$, o po to – pavidalu $a(x-h)^2 + k$:

a) $4x^2 + 12x + 5$ **b)** $9x^2 - 6x - 2$

25. Raidinis a Išskirkite pilnąjį kvadratą: $ax^2 + 2x + 1$, $a \neq 0$.

26. Sveikieji skaičiai Įrodykite, kad jokiam natūraliajam n skaičius $n^2 + n + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

27. Mintinai Apskaičiuokite be skaičiuotuvo ir nedaugindami stulpeliu:

a) $103^2 - 6 \cdot 103 + 9$ **b)** $57^2 + 6 \cdot 57 + 9 - 3600$

28. Dvi galimybės Daugianarį $x^2 + bx + c$ užrašius pilnojo kvadrato pavidalu $(x - h)^2 + k$, gauta $h = k$; be to, $c = 6$. Raskite visas galimas b reikšmes.

29. Gudriai Įrodykite, kad $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ yra kvadratinio trinario kvadratas (t. y. lygus $(x^2 + px + q)^2$).

30. Iššūkis Įrodykite tapatybę, kurioje nėra trupmenų: $4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)$. Pritaikykite ją daugianariui $3x^2 + 5x - 2$.

Atsakymai

1. Taip $(a;\ h;\ k)$: a) $(1;\ 3;\ 5)$, b) $(2;\ -1;\ -7)$, d) $(-1;\ -4;\ 0)$, e) $(1;\ 0;\ 5)$, f) $(-1;\ 1;\ 3)$, h) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 0\right)$. Ne: c), g).

2. b) 25; $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$.

3. a) 4; 16. b) 6; 36. c) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. d) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$.

4. a) 9; $(x+3)^2$. b) 49; $(x-7)^2$. c) $\frac{25}{4}$; $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$. d) $\frac{1}{4}$; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

5. a) $(x-3)^2+2$. b) $(x+2)^2-5$. c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$. d) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

6. $(x-4)^2-13$.

7. $2(x+3)^2-13$.

8. a) $3(x-2)^2-5$. b) $-(x-3)^2+7$. c) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$. d) $-2(x+2)^2+8$.

9. a) $2x^2-12x+19$. b) $-x^2-2x+3$. c) $\frac{1}{2}x^2-4x+6$.

10. a) T. b) T. c) T. d) K.

11. A–2, B–1, C–4, D–3.

12. a) $p = \pm 8$. b) $p = 4$.

13. a) $(x+k)^2+3-k^2$. b) $\left(x-\frac{m+1}{2}\right)^2-\frac{(m+1)^2}{4}$.

14. $-4;\ 0;\ 0;\ t^2-4$.

15. a) $b=-10$, $c=27$. b) $b=4$, $c=-1$.

16. $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$.

17. $h=5$, $c=18$.

18. Pvz., $x^2-6x+7,\ 2x^2-12x+16$.

19. $(x^2+2)^2+3$.

20. $2x^2-8x+3=2(x-2)^2-5$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus.

22. $a=2$, $h=3$, $k=-1$.

23. $m=4$: $(x+3)^2$; $m=-4$: $(x-1)^2$.

24. a) $(2x+3)^2-4=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-4$. b) $(3x-1)^2-3=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-3$.

25. $a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a}$.

26. Įrodymas – žr. sprendimus.

27. a) 10 000. b) 0.

28. $b=-4$ arba $b=6$.

29. $(x^2+3x+1)^2$.

30. $12(3x^2+5x-2)=(6x+5)^2-49$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Atskliauskite abi puses ir palyginkite koeficientus prie x bei laisvuosius narius.

22. Iš lygybės $P(1) = P(5)$ gausite $(1-h)^2 = (5-h)^2$. Kada dviejų skaičių kvadratai lygūs?

23. Trinaris $x^2 + Bx + C$ yra dvinario kvadratas, kai $C = \left(\frac{B}{2}\right)^2$.

24. $4x^2 = (2x)^2$, todėl ieškokite kvadrato $(2x+q)^2$. Tada $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

25. Iškelkite a: $a\left(x^2 + \frac{2}{a}x\right) + 1$. Kam lygi pusė koeficiento prie x?

26. Palyginkite $n^2 + n + 1$ su n^2 ir su $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

27. Atpažinkite $(x-3)^2$ ir $(x+3)^2$, kai $x = 103$ ir $x = 57$.

28. Atskliaudę $(x-h)^2 + k$ gausite $c = h^2 + k$. Įrašykite $k = h$, o gautą lygtį spręskite išskirdami pilnąjį kvadratą.

29. Atskirai sudauginkite $x(x+3)$ ir $(x+1)(x+2)$, tada pažymėkite $t = x^2 + 3x$.

30. Atskliauskite dešinę pusę. Pritaikydami imkite $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$.

Sprendimai (21–30)

21. Kairė pusė: $x^2 - 2hx + h^2 + k$, dešinė: $x^2 - 2px + p^2 + q$. Jos lygios su visais x, todėl atitinkami koeficientai lygūs. Prie x: $-2h = -2p$, t. y. $h = p$; laisvieji nariai: $h^2 + k = p^2 + q$, o kadangi $h = p$, tai $k = q$. **Išvada:** pilnojo kvadrato pavidalas užrašomas vieninteliu būdu.

22. $P(1) = a(1-h)^2 + k$, $P(5) = a(5-h)^2 + k$. Iš $P(1) = P(5)$ ir $a \neq 0$: $(1-h)^2 = (5-h)^2$. Skaičiai, kurių kvadratai lygūs, yra lygūs arba priešingi:

- $1 - h = 5 - h$ – neįmanoma ($1 \neq 5$);
- $1 - h = -(5-h) = h - 5$, todėl $2h = 6$, $h = 3$.

$P(3) = a \cdot 0 + k = -1$, todėl $k = -1$. $P(1) = a \cdot 4 - 1 = 7$, todėl $a = 2$. **Atsakymas:** $P(x) = 2(x-3)^2 - 1$. Patikra: $P(5) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ ✓

23. Kadangi $x^2 + Bx + C = \left(x + \frac{B}{2}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4}$, trinaris yra dvinario kvadratas tada ir tik tada, kai $C = \frac{B^2}{4}$. Čia $B = m + 2$, $C = m + 5$:

$$\frac{(m+2)^2}{4} = m + 5 \;\Rightarrow\; m^2 + 4m + 4 = 4m + 20 \;\Rightarrow\; m^2 = 16 \;\Rightarrow\; m = 4 \text{ arba } m = -4.$$

$m = 4$: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$; $\quad m = -4$: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

24. a) $4x^2 + 12x = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3$, o $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$. Todėl $4x^2 + 12x + 5 = (2x+3)^2 - 4$. Kadangi $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, tai $(2x+3)^2 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$, todėl reiškinys lygus $4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4$.
b) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$, todėl $9x^2 - 6x - 2 = (3x-1)^2 - 3 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 3$.

25. $ax^2 + 2x + 1 = a\left(x^2 + \frac{2}{a}x\right) + 1$. Skaičiaus $\frac{2}{a}$ pusė lygi $\frac{1}{a}$, todėl $x^2 + \frac{2}{a}x = \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}$. Tada

$$ax^2 + 2x + 1 = a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - a \cdot \frac{1}{a^2} + 1 = a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 1 - \frac{1}{a}.$$

Patikra su $a = 1$: $(x+1)^2 + 0 = x^2 + 2x + 1$ ✓

26. Kadangi n – natūralusis skaičius, $n > 0$, todėl $n^2 < n^2 + n + 1$ ir $n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (nes $n < 2n$). Taigi $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$. Tarp gretimų natūraliųjų skaičių n ir $n + 1$ kito natūraliojo skaičiaus nėra, todėl tarp jų kvadratų nėra jokio kito natūraliojo skaičiaus kvadrato. Vadinasi, $n^2 + n + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

27. a) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$; kai $x = 103$: $(103-3)^2 = 100^2 = 10\,000$.
b) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$; kai $x = 57$: $60^2 - 3600 = 3600 - 3600 = 0$.

28. $(x-h)^2 + k = x^2 - 2hx + h^2 + k$, todėl $b = -2h$, $c = h^2 + k$. Kai $k = h$ ir $c = 6$: $h^2 + h = 6$. Išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$\left(h + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 6 \;\Rightarrow\; \left(h + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \;\Rightarrow\; h + \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2},$$

taigi $h = 2$ arba $h = -3$, o kadangi $b = -2h$, tai $b = -4$ arba $b = 6$.
Patikra: $(x-2)^2 + 2 = x^2 - 4x + 6$ ✓, $(x+3)^2 - 3 = x^2 + 6x + 6$ ✓

29. $x(x+3) = x^2 + 3x$, $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$. Pažymėję $t = x^2 + 3x$:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

Patikra su $x = 1$: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$, $1 + 3 + 1 = 5$ ✓

30. Dešinė pusė: $(2ax+b)^2 - b^2 + 4ac = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 4a(ax^2 + bx + c)$ ✓
Kai $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$: $b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$, todėl

$$12(3x^2 + 5x - 2) = (6x+5)^2 - 49.$$

Patikra: $(6x+5)^2 - 49 = 36x^2 + 60x - 24 = 12(3x^2 + 5x - 2)$ ✓

Kvadratinis daugianaris

3 tema: mažiausia ir didžiausia reikšmė (ekstremumas)

1. Mažiausia reikšmė: $P(x) = 3(x-5)^2 - 1$

Įrodome, kad $P(x) \geq -1$ su visais x:

$$(x-5)^2 \geq 0 \quad \text{kvadratas neneigiamas}$$
$$3(x-5)^2 \geq 0 \quad \cdot 3 \text{ (teigiamas) – ženklas nesikeičia}$$
$$3(x-5)^2 - 1 \geq -1 \quad \text{atimame 1 iš abiejų pusių}$$
$$P(x) \geq -1$$

Reikšmė -1 **tikrai įgyjama:** kai $x-5=0$, t. y. $x=5$, $P(5) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1$.

$\boxed{x_{\min} = 5}$ – **minimumo taškas** (ką įrašome)

$\boxed{P_{\min} = -1}$ – **minimumas** (ką gauname)

2. Didžiausia reikšmė: $P(x) = -2(x+4)^2 + 7$

Įrodome, kad $P(x) \leq 7$ su visais x:

$$(x+4)^2 \geq 0 \quad \text{kvadratas neneigiamas}$$
$$-2(x+4)^2 \leq 0 \quad \cdot(-2) \text{ – } \textbf{ženklas keičiasi!}$$
$$-2(x+4)^2 + 7 \leq 7 \quad \text{pridedame 7}$$
$$P(x) \leq 7$$

Reikšmė 7 **tikrai įgyjama:** kai $x+4=0$, t. y. $x=-4$, $P(-4) = -2 \cdot 0^2 + 7 = 7$.

$\boxed{x_{\max} = -4}$ – **maksimumo taškas**

$\boxed{P_{\max} = 7}$ – **maksimumas**

Dėmesio: $(x+4)^2 = (x-(-4))^2$, todėl taškas -4, ne 4.

Ekstremumas

$P(x) = a(x-h)^2 + k$

3. Apibendriname: sąvokos

ekstremumo taškas (ką įrašome – x)	**ekstremumas** (ką gauname – P)
minimumo taškas $x_{\min}$	minimumas $P_{\min}$
maksimumo taškas $x_{\max}$	maksimumas $P_{\max}$

Minimumas ir maksimumas vadinami **ekstremumais**, o jų taškai – **ekstremumo taškais**.

Reikia įrodyti, kad:

① nelygybė teisinga su *visais* x ($P(x) \geq -1$);

② reikšmė pasiekiama ($P(5) = -1$).

Vien $P(5) = -1$ nieko neįrodo – reikia ir ①!

4. Skaitome iš pavidalo

Pirmiausia užrašome $a(x-h)^2 + k$ ir žiūrime į a **ženklą**.

daugianaris	a	atsakymas
$2(x-1)^2 + 5$	$2 > 0$	$x_{\min} = 1$, $P_{\min} = 5$
$-(x+3)^2 - 4$	$-1 < 0$	$x_{\max} = -3$, $P_{\max} = -4$
$4x^2 - 7$ $(h=0)$	$4 > 0$	$x_{\min} = 0$, $P_{\min} = -7$
$6 - \frac{1}{2}(x-2)^2$	$-\frac{1}{2} < 0$	$x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 6$

Kai $a > 0$, didžiausios reikšmės **nėra**;
kai $a < 0$, mažiausios reikšmės **nėra**.

5. Bendras atvejis: $P(x) = a(x-h)^2 + k$

$a > 0$ (yra minimumas)

$$(x-h)^2 \geq 0$$
$$a(x-h)^2 \geq 0 \quad a > 0 \text{ – ženklas nesikeičia}$$
$$a(x-h)^2 + k \geq k$$
$$P(x) \geq k$$

Lygybė gaunama, kai $x = h$: $P(h) = k$.

$\boxed{x_{\min} = h, \qquad P_{\min} = k}$

$a < 0$ (yra maksimumas)

$$(x-h)^2 \geq 0$$
$$a(x-h)^2 \leq 0 \quad a < 0 \text{ – ženklas keičiasi}$$
$$a(x-h)^2 + k \leq k$$
$$P(x) \leq k$$

Lygybė gaunama, kai $x = h$: $P(h) = k$.

$\boxed{x_{\max} = h, \qquad P_{\max} = k}$

Ekstremumo taškas $= h$ (kai skliaustas lygus 0), ekstremumas $= k$, rūšį lemia a **ženklas**.

Kvadratinis daugianaris

3 tema: mažiausia ir didžiausia reikšmė (ekstremumas) – 30 užduočių

Daugianaris $P(x) = a(x-h)^2 + k$. Kai $a > 0$: $(x-h)^2 \geq 0 \Rightarrow a(x-h)^2 \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq k$, $x_{\min} = h$, $P_{\min} = k$. Kai $a < 0$: $a(x-h)^2 \leq 0 \Rightarrow P(x) \leq k$, $x_{\max} = h$, $P_{\max} = k$. Reikia pagrįsti du dalykus: nelygybę su *visais* x ir tai, kad reikšmė pasiekiama: $P(h) = k$. Ekstremumo taškas – tai x reikšmė (ką įrašome), ekstremumas – P reikšmė (ką gauname).

1. Atpažink Nurodykite ekstremumo rūšį ir užrašykite $x_{\min}$, $P_{\min}$ arba $x_{\max}$, $P_{\max}$.

a) $2(x-1)^2 + 5$ **c)** $4x^2 - 7$ **e)** $(x+5)^2$

b) $-(x+3)^2 - 4$ **d)** $6 - \frac{1}{2}(x-2)^2$ **f)** $-3(x-4)^2$

2. Išskirk ($a = 1$) Išskirkite pilnąjį kvadratą ir raskite $x_{\min}$ bei $P_{\min}$.

a) $x^2 - 6x + 11$ **b)** $x^2 + 4x - 1$ **c)** $x^2 + 3x + 1$ **d)** $x^2 - 5x + 6$

3. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo ekstremumo tašką ir ekstremumą dešinėje (pirmiausia išskirkite pilnąjį kvadratą).

A) $x^2 - 4x + 7$ 1) $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = 3$

B) $-x^2 + 4x - 7$ 2) $x_{\max} = -2$, $P_{\max} = 11$

C) $x^2 + 4x + 7$ 3) $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = -3$

D) $-x^2 - 4x + 7$ 4) $x_{\min} = -2$, $P_{\min} = 3$

4. Rask klaidą Mokinys rašo: $x^2 - 8x + 3 = (x-4)^2 + 16 + 3 = (x-4)^2 + 19$, todėl $x_{\min} = -4$ ir $P_{\min} = 19$. Raskite dvi klaidas ir parašykite teisingą atsakymą.

5. Rask klaidą ($a < 0$) Mokinys rašo: $-2x^2+8x-3 = -2(x^2-4x)-3 = -2\big((x-2)^2-4\big)-3 = -2(x-2)^2-4-3 = -2(x-2)^2 - 7$, todėl $x_{\min} = 2$ ir $P_{\min} = -7$. Raskite visas klaidas ir jas ištaisykite.

6. Išskirk ($a \neq 1$) Raskite ekstremumo tašką ir ekstremumą (nurodykite, ar tai minimumas, ar maksimumas).

a) $3x^2 - 12x + 7$ **b)** $-x^2 + 6x - 2$ **c)** $2x^2 + 2x + 1$ **d)** $-2x^2 - 8x$

7. Lentelė Duota $P(x) = (x-3)^2 + 2$. Užpildykite lentelę.

x	-1	1	2	3	4	5	7
$P(x)$	□	□	□	□	□	□	□

Kuri lentelės reikšmė mažiausia? Ar galima teigti, kad ji mažiausia su *visais* x? Pagrįskite nelygybių grandine.

8. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Daugianaris $x^2 + 6$ turi $x_{\min} = 6$.

b) Didžiausia reiškinio $-(x-5)^2$ reikšmė lygi 0.

c) Jei $P(3) = 2$, tai $P_{\min} = 2$.

d) Daugianaris $3 - 2(x+1)^2$ turi $x_{\max} = -1$ ir $P_{\max} = 3$.

e) Daugianaris $2(x-3)^2 + 1$ turi ir minimumą, ir maksimumą.

f) Jei $P_{\min} = 0$, tai su visais x galioja $P(x) > 0$.

9. Atvirkščiai Žinomi a, ekstremumo taškas ir ekstremumas. Užrašykite daugianarį pilnojo kvadrato pavidalu $a(x-h)^2+k$ ir standartiniu pavidalu ax^2+bx+c.

a) $a=3,\ x_{\min}=2,\ P_{\min}=-1$
b) $a=-2,\ x_{\max}=-1,\ P_{\max}=4$
c) $a=\frac{1}{2},\ x_{\min}=4,\ P_{\min}=-2$

10. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus daugianarius, kurių $x_{\max}=-3$ ir $P_{\max}=4$, ir užrašykite juos standartiniu pavidalu. Ar kuris nors iš jų gali turėti $a=1$? Kodėl?

11. Su 1 tema Daugianario $P(x)=x^2+bx+c$ reikšmės $P(0)=5$ ir $P(2)=1$. Raskite b ir c, o tada $x_{\min}$ ir $P_{\min}$.

12. Iš reikšmių Daugianario $P(x)=ax^2+bx+c$ reikšmės: $P(0)=1,\ P(1)=4,\ P(-1)=-4$. Raskite a, b, c ir ekstremumą.

13. Neatskliausk! Duota $P(x)=3(x-2)^2+1$. Neatskliausdami raskite:

a) $x_{\min}$ ir $P_{\min}$;
b) $P(5)$ ir $P(-1)$;
c) ar yra toks x, su kuriuo $P(x)=0$? Pagrįskite.

14. Ar egzistuoja? Ar yra toks x, su kuriuo:

a) $x^2-6x+10=0$;
b) $-x^2+2x-3=0$;
c) $x^2+4x+4=0$;
d) $2x^2-4x+5<3$?

Atsakymą pagrįskite išskirdami pilnąjį kvadratą.

15. Tekstinis Sandaugą užrašykite kaip vieno nežinomojo reiškinį, raskite jos ekstremumą ir pačius skaičius:

a) dviejų skaičių suma lygi 12; kokia didžiausia gali būti jų sandauga?
b) dviejų skaičių skirtumas lygus 6; kokia mažiausia gali būti jų sandauga?

16. Tekstinis Ūkininkas turi 40 m tvoros ir ja aptveria stačiakampį sklypą prie sienos (ketvirtosios kraštinės tverti nereikia). Kokie turi būti sklypo matmenys, kad plotas būtų didžiausias? Koks tas plotas?

17. Rask koeficientus Raskite nežinomus koeficientus:

a) x^2+bx+c turi $x_{\min}=-2$ ir $P_{\min}=-5$;
b) $-x^2+bx+c$ turi $x_{\max}=3$ ir $P_{\max}=7$;
c) x^2-6x+c turi $P_{\min}=4$.

18. Raidiniai koeficientai Raskite ekstremumo tašką ir ekstremumą, išreikštus raidėmis k ir m.

a) $x^2+2kx+3$ **b)** $x^2-(m+1)x$

19. Gudriai Pažymėję $t=x^2$ arba išskirdami pilnąjį kvadratą su x^2, raskite mažiausią reiškinio x^4-8x^2+20 reikšmę ir visus x, su kuriais ji pasiekiama.

20. Sandauga Atskliauskite ir raskite ekstremumo tašką bei ekstremumą:

a) $(x-2)(x+6)$;
b) $(x+1)(3-x)$.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Postūmis Duota $P(x) = x^2 - 6x + 4$. Raskite šių daugianarių ekstremumo tašką ir ekstremumą:

a) $P(x+2)$ **b)** $P(2x)$ **c)** $P(x) + P(x+2)$

22. Dvi galimybės Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ mažiausia reikšmė lygi 1, o $P(1) = 5$ ir $P(2) = 2$. Raskite visus tokius daugianarius.

23. Parametras Daugianario $P(x) = x^2 - 2mx + 3m$ mažiausia reikšmė priklauso nuo m. Su kuriuo m ši mažiausia reikšmė didžiausia ir kam ji lygi?

24. Tekstinis Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 10. Kraštinėse AB, BC, CD, DA pažymėti tokie taškai K, L, M, N, kad $AK = BL = CM = DN = x$. Keturkampis $KLMN$ yra kvadratas. Su kuriuo x jo plotas mažiausias ir kam jis lygus? Įrodykite, kad mažesnio ploto nebūna.

25. Be trupmenų Raskite ekstremumo tašką ir ekstremumą, pirmiausia išskyrę dvinario kvadratą $(px+q)^2$:

a) $4x^2 + 12x + 5$ **b)** $9x^2 - 6x - 2$ **c)** $-4x^2 + 4x$

26. Raidinis a Daugianaris $P(x) = ax^2 + 2x + 1$, $a \neq 0$.

a) Išskirkite pilnąjį kvadratą ir nurodykite, kada daugianaris turi minimumą, o kada – maksimumą.

b) Su kuriuo a ekstremumas lygus 0?

c) Su kuriuo a ekstremumo taškas lygus -2? Ar tai minimumas, ar maksimumas?

27. Parametras Duoti daugianariai $P(x) = x^2 - 2px + 5$ ir $Q(x) = x^2 + 4x + p + 3$.

a) Raskite jų minimumo taškus. Su kuriuo p jie sutampa?

b) Su kuriais p jų mažiausios reikšmės $P_{\min}$ ir $Q_{\min}$ lygios?

28. Iššūkis Reiškinys $S(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2$, kur a ir b – duoti skaičiai.

a) Raskite $x_{\min}$ ir $S_{\min}$, kai $a = 1$, $b = 7$.

b) Raskite $x_{\min}$ ir $S_{\min}$ bendruoju atveju (atsakymą išreikškite parametrais a ir b).

29. Tekstinis Teatro bilietas kainuoja 10 €, parduodama 200 bilietų. Kiekvieną kartą pabranginus bilietą 1 €, parduodama 10 bilietų mažiau. Kokia turi būti bilieto kaina, kad pajamos būtų didžiausios? Kokios tada bus pajamos?

30. Ar egzistuoja? Duoti daugianariai $P(x) = x^2 - 4x + 9$ ir $Q(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) Raskite $P_{\min}$ ir $Q_{\max}$.

b) Ar suma $P(x) + Q(x)$ turi ekstremumą? Kodėl?

c) Raskite skirtumo $P(x) - Q(x)$ mažiausią reikšmę ir įrodykite, kad $P(x) > Q(x)$ su visais x.

Atsakymai

1. a) $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = 5$. b) $x_{\max} = -3$, $P_{\max} = -4$. c) $x_{\min} = 0$, $P_{\min} = -7$. d) $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 6$. e) $x_{\min} = -5$, $P_{\min} = 0$. f) $x_{\max} = 4$, $P_{\max} = 0$.

2. a) $(x-3)^2+2$: $x_{\min} = 3$, $P_{\min} = 2$. b) $(x+2)^2-5$: -2; -5. c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$: $-\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{4}$. d) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$: $\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{4}$.

3. A–1, B–3, C–4, D–2.

4. $(x-4)^2 - 13$ (reikia atimti 16); $x_{\min} = 4$ (ne -4), $P_{\min} = -13$.

5. $-2(x-2)^2+5$; $a < 0$, todėl yra maksimumas: $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 5$.

6. a) $3(x-2)^2-5$: min., 2; -5. b) $-(x-3)^2+7$: maks., 3; 7. c) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$: min., $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. d) $-2(x+2)^2+8$: maks., -2; 8.

7. 18; 6; 3; 2; 3; 6; 18. Mažiausia 2 (kai $x = 3$). Taip: $P(x) \geq 2$ su visais x, $P(3) = 2$.

8. a) K. b) T. c) K. d) T. e) K. f) K.

9. a) $3(x-2)^2 - 1 = 3x^2 - 12x + 11$. b) $-2(x+1)^2 + 4 = -2x^2 - 4x + 2$. c) $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$.

10. Pvz. $-(x+3)^2 + 4 = -x^2 - 6x - 5$ ir $-2(x+3)^2 + 4 = -2x^2 - 12x - 14$. Ne: maksimumas galimas tik tada, kai $a < 0$.

11. $b = -4$, $c = 5$; $P(x) = (x-2)^2 + 1$: $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = 1$.

12. $a = -1$, $b = 4$, $c = 1$; $P(x) = -(x-2)^2 + 5$: $x_{\max} = 2$, $P_{\max} = 5$.

13. a) $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = 1$. b) $P(5) = 28$, $P(-1) = 28$. c) Ne, nes $P(x) \geq 1$.

14. a) Ne. b) Ne. c) Taip, $x = -2$. d) Ne.

15. a) 36 (skaičiai 6 ir 6). b) -9 (skaičiai -3 ir 3).

16. Sienai statmenos kraštinės po 10 m, lygiagreti sienai – 20 m; plotas 200 m^2.

17. a) $b = 4$, $c = -1$. b) $b = 6$, $c = -2$. c) $c = 13$.

18. a) $x_{\min} = -k$, $P_{\min} = 3 - k^2$. b) $x_{\min} = \frac{m+1}{2}$, $P_{\min} = -\frac{(m+1)^2}{4}$.

19. $P_{\min} = 4$, kai $x = 2$ arba $x = -2$.

20. a) $x_{\min} = -2$, $P_{\min} = -16$. b) $-(x-1)^2 + 4$: $x_{\max} = 1$, $P_{\max} = 4$.

21. a) $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = -5$. b) $x_{\min} = \frac{3}{2}$, $P_{\min} = -5$. c) $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = -8$.

22. $x^2 - 6x + 10$ ir $9x^2 - 30x + 26$.

23. $m = \frac{3}{2}$; mažiausia reikšmė tada lygi $\frac{9}{4}$.

24. $x = 5$, plotas 50.

25. a) $x_{\min} = -\frac{3}{2}$, $P_{\min} = -4$. b) $x_{\min} = \frac{1}{3}$, $P_{\min} = -3$. c) $x_{\max} = \frac{1}{2}$, $P_{\max} = 1$.

26. a) $a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2 + 1 - \frac{1}{a}$; $a > 0$ – minimumas, $a < 0$ – maksimumas, taškas $-\frac{1}{a}$, ekstremumas $1 - \frac{1}{a}$. b) $a = 1$. c) $a = \frac{1}{2}$, minimumas.

27. a) $x_{\min}(P) = p$, $x_{\min}(Q) = -2$; sutampa, kai $p = -2$. b) $p = 2$ arba $p = -3$.

28. a) $x_{\min} = 4$, $S_{\min} = 18$. b) $x_{\min} = \frac{a+b}{2}$, $S_{\min} = \frac{(a-b)^2}{2}$.

29. Kaina 15 €, pajamos 2250 €.

30. a) $P_{\min} = 5$, $Q_{\max} = 4$. b) Ne (suma lygi $-2x + 12$, ji neturi nei didžiausios, nei mažiausios reikšmės). c) $\frac{3}{2}$; $P(x) > Q(x)$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Pirma išskirkite pilnąjį kvadratą pačiame $P(x)$, o tada vietoj x įrašykite $x+2$, $2x$. c) dalyje atskliauskite ir sudėkite.

22. Mažiausia reikšmė 1 reiškia, kad pilnojo kvadrato pavidale $a(x-h)^2+k$ skaičius $k=1$. Įrašykite $x=1$ ir $x=2$ ir palyginkite gautas lygybes.

23. Išskirkite pilnąjį kvadratą x atžvilgiu ir mažiausią reikšmę užrašykite kaip m reiškinį. Tai vėl kvadratinis daugianaris, tik jo kintamasis – m.

24. Pritaikykite Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui KBL ($BK = 10 - x$) ir raskite KL^2.

25. Pirma užrašykite $4x^2 + 12x = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3$ ir t. t. Tada $2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

26. Iškelkite a prieš skliaustus: $a\left(x^2 + \frac{2}{a}x\right) + 1$. Kam lygi pusė koeficiento prie x?

27. Išskirkite pilnąjį kvadratą abiejuose daugianariuose ($P = (x-p)^2 + \ldots$). b) dalyje gautą lygtį su p spręskite vėl išskirdami pilnąjį kvadratą.

28. Atskliauskite ir sudėkite: gausite $2x^2 - \ldots$. Iškelkite 2 ir išskirkite pilnąjį kvadratą; su a ir b elkitės kaip su skaičiais.

29. Jei kaina $10 + x$ eurų, tai bus parduota $200 - 10x$ bilietų. Pajamos = kaina · bilietų skaičius.

30. $P - Q = 2x^2 - 6x + 6$. Palyginkite $P_{\min}$ ir $Q_{\max}$ – ar jie sutampa su rastu skirtumu?

Sprendimai (21–30)

21. Pirma išskiriame pilnąjį kvadratą: $P(x) = x^2 - 6x + 4 = (x-3)^2 - 5$.
a) Vietoj x įrašome $x+2$: $P(x+2) = \big((x+2)-3\big)^2 - 5 = (x-1)^2 - 5$. Kadangi $(x-1)^2 \geq 0$, $P(x+2) \geq -5$, o $P(1+2) = -5$. Taigi $x_{\min} = 1$, $P_{\min} = -5$.
b) $P(2x) = (2x-3)^2 - 5$ ir $2x - 3 = 2\big(x - \frac{3}{2}\big)$, todėl $P(2x) = 4\big(x - \frac{3}{2}\big)^2 - 5 \geq -5$. Lygybė, kai $x = \frac{3}{2}$. Taigi $x_{\min} = \frac{3}{2}$, $P_{\min} = -5$.
c) $P(x) + P(x+2) = (x-3)^2 - 5 + (x-1)^2 - 5 = 2x^2 - 8x + 10 - 10 = 2x^2 - 8x = 2(x-2)^2 - 8 \geq -8$. Lygybė, kai $x = 2$. Taigi $x_{\min} = 2$, $P_{\min} = -8$.
Patikra: $P(2) + P(4) = (4 - 12 + 4) + (16 - 24 + 4) = -4 - 4 = -8$ ✓

22. Kadangi daugianaris turi mažiausią reikšmę, tai $a > 0$ (kai $a < 0$, mažiausios reikšmės nėra). Pilnojo kvadrato pavidalu $P(x) = a(x-h)^2 + 1$, nes $P_{\min} = k = 1$. Žinome $P(1) = 5$ ir $P(2) = 2$:

$$a(1-h)^2 = 4, \qquad a(2-h)^2 = 1.$$

Pirmą lygybę užrašome kaip $a(1-h)^2 = 4 \cdot a(2-h)^2$, todėl, padaliję iš $a \neq 0$, gauname $(1-h)^2 = 4(2-h)^2 = \big(2(2-h)\big)^2$. Skaičių kvadratai lygūs, kai skaičiai lygūs arba priešingi:

- $1 - h = 2(2-h)$: $1 - h = 4 - 2h$, $h = 3$. Tada $a(2-3)^2 = 1$, $a = 1$.
- $1 - h = -2(2-h)$: $1 - h = -4 + 2h$, $3h = 5$, $h = \frac{5}{3}$. Tada $a\big(\frac{1}{3}\big)^2 = 1$, $a = 9$.

Abiem atvejais $a > 0$, todėl tinka abu. **Atsakymas:** $P(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$ arba $P(x) = 9\big(x - \frac{5}{3}\big)^2 + 1 = 9x^2 - 30x + 26$.
Patikra: $x^2 - 6x + 10$: $P(1) = 5$, $P(2) = 2$ ✓; $9x^2 - 30x + 26$: $P(1) = 5$, $P(2) = 36 - 60 + 26 = 2$ ✓

23. Išskiriame pilnąjį kvadratą x atžvilgiu: $P(x) = x^2 - 2mx + 3m = (x-m)^2 - m^2 + 3m$. Kadangi $(x-m)^2 \geq 0$, $P(x) \geq 3m - m^2$, o $P(m) = 3m - m^2$. Taigi $P_{\min} = 3m - m^2$ (tai m reiškinys). Dabar išskiriame pilnąjį kvadratą m atžvilgiu:

$$3m - m^2 = -\big(m^2 - 3m\big) = -\Big(m - \frac{3}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

Kadangi $a = -1 < 0$, yra maksimumas: $m_{\max} = \frac{3}{2}$, didžiausia reikšmė $\frac{9}{4}$.
Atsakymas: $m = \frac{3}{2}$, tada mažiausia reikšmė lygi $\frac{9}{4}$. Patikra: $x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \big(x - \frac{3}{2}\big)^2 + \frac{9}{4}$ ✓

24. Pagal Pitagoro teoremą $KL^2 = BK^2 + BL^2 = (10-x)^2 + x^2$, o $KLMN$ yra kvadratas, todėl plotas

$$S = x^2 + (10-x)^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x^2 - 10x) + 100 = 2(x-5)^2 - 50 + 100 = 2(x-5)^2 + 50.$$

Kadangi $(x-5)^2 \geq 0$, tai $S \geq 50$, o kai $x = 5$, gauname $S = 50$. **Atsakymas:** $x = 5$, plotas 50; mažesnio ploto nebūna, nes $S \geq 50$. Patikra: $x = 5$: $25 + 25 = 50$ ✓

25. a) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$, todėl $4x^2 + 12x + 5 = (2x+3)^2 - 4$. Kadangi $(2x+3)^2 \geq 0$, $P(x) \geq -4$. Lygybė, kai $2x + 3 = 0$, t. y. $x = -\frac{3}{2}$. $x_{\min} = -\frac{3}{2}$, $P_{\min} = -4$.
b) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$, todėl $9x^2 - 6x - 2 = (3x-1)^2 - 3 \geq -3$. Lygybė, kai $3x - 1 = 0$, t. y. $x = \frac{1}{3}$. $x_{\min} = \frac{1}{3}$, $P_{\min} = -3$.
c) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, todėl $-4x^2 + 4x = -(2x-1)^2 + 1$. Kadangi $(2x-1)^2 \geq 0$, tai $-(2x-1)^2 \leq 0$ ir $P(x) \leq 1$. Lygybė, kai $x = \frac{1}{2}$. $x_{\max} = \frac{1}{2}$, $P_{\max} = 1$.
Patikra: c) $-4 \cdot \frac{1}{4} + 2 = 1$ ✓

26. a) $ax^2 + 2x + 1 = a\big(x^2 + \frac{2}{a}x\big) + 1$. Pusė koeficiento $\frac{2}{a}$ lygi $\frac{1}{a}$, todėl $x^2 + \frac{2}{a}x = \big(x + \frac{1}{a}\big)^2 - \frac{1}{a^2}$ ir

$$P(x) = a\Big(x + \frac{1}{a}\Big)^2 - \frac{1}{a} + 1.$$

Kai $a > 0$: $P(x) \geq 1 - \frac{1}{a}$, minimumas, $x_{\min} = -\frac{1}{a}$, $P_{\min} = 1 - \frac{1}{a}$. Kai $a < 0$: $P(x) \leq 1 - \frac{1}{a}$, maksimumas, $x_{\max} = -\frac{1}{a}$, $P_{\max} = 1 - \frac{1}{a}$.

b) $1-\frac{1}{a}=0$, todėl $\frac{1}{a}=1$, $a=1$.
c) $-\frac{1}{a}=-2$, todėl $\frac{1}{a}=2$, $a=\frac{1}{2}>0$, todėl minimumas ($P_{\min}=1-2=-1$).
Patikra: $a=1$: $(x+1)^2+0$ ✓; $a=\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}x^2+2x+1=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$ ✓

27. a) $P(x)=x^2-2px+5=(x-p)^2+5-p^2$, todėl $x_{\min}=p$, $P_{\min}=5-p^2$. $Q(x)=x^2+4x+p+3=(x+2)^2-4+p+3=(x+2)^2+p-1$, todėl $x_{\min}=-2$, $Q_{\min}=p-1$. Taškai sutampa, kai $p=-2$.
b) $5-p^2=p-1$, t. y. $p^2+p=6$. Išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=6 \;\Rightarrow\; \left(p+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \;\Rightarrow\; p+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2},$$

taigi $p=2$ arba $p=-3$.
Patikra: $p=2$: $P_{\min}=5-4=1$, $Q_{\min}=2-1=1$ ✓; $p=-3$: $P_{\min}=5-9=-4$, $Q_{\min}=-3-1=-4$ ✓

28. a) $S(x)=(x-1)^2+(x-7)^2=2x^2-16x+50=2(x^2-8x)+50=2(x-4)^2-32+50=2(x-4)^2+18$. Kadangi $(x-4)^2\ge 0$, tai $S\ge 18$; lygybė, kai $x=4$. $x_{\min}=4$, $S_{\min}=18$.
b) $S(x)=2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2=2\Big(x^2-(a+b)x\Big)+a^2+b^2=2\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2-\frac{(a+b)^2}{2}+a^2+b^2$. Kadangi $a^2+b^2-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{2}=\frac{(a-b)^2}{2}$:

$$S(x)=2\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2+\frac{(a-b)^2}{2}\ge\frac{(a-b)^2}{2}.$$

$x_{\min}=\frac{a+b}{2}$, $S_{\min}=\frac{(a-b)^2}{2}$. Patikra: $a=1$, $b=7$: $x_{\min}=4$, $S_{\min}=\frac{36}{2}=18$ ✓

29. Jei kaina $10+x$ eurų, tai bus parduota $200-10x$ bilietų. Pajamos

$$\begin{aligned}S&=(10+x)(200-10x)=-10x^2+100x+2000=-10(x^2-10x)+2000\\&=-10(x-5)^2+250+2000=-10(x-5)^2+2250.\end{aligned}$$

Kadangi $(x-5)^2\ge 0$, tai $-10(x-5)^2\le 0$ ir $S\le 2250$; lygybė, kai $x=5$ ($a=-10<0$, maksimumas).
Atsakymas: kaina $10+5=15$ €, pajamos 2250 €. Patikra: $15\cdot 150=2250$ ✓

30. a) $P(x)=(x-2)^2+5$, todėl $P_{\min}=5$. $Q(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$, todėl $Q_{\max}=4$.
b) $P(x)+Q(x)=-2x+12$ – tai nebe kvadratinis daugianaris. Jo reikšmės gali būti kiek norima didelės ir kiek norima mažos (pvz., kai $x=-1000$ ir $x=1000$), todėl jis neturi nei didžiausios, nei mažiausios reikšmės.
c) $P(x)-Q(x)=2x^2-6x+6=2(x^2-3x)+6=2\big(x-\frac{3}{2}\big)^2-\frac{9}{2}+6=2\big(x-\frac{3}{2}\big)^2+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}>0$. Todėl $P(x)>Q(x)$ su visais x; skirtumo minimumas $\frac{3}{2}$, kai $x=\frac{3}{2}$. Be to, $P_{\min}=5>4=Q_{\max}$ – kiekviena P reikšmė ne mažesnė už 5, o kiekviena Q reikšmė ne didesnė už 4.
Patikra: $x=\frac{3}{2}$: $P=\frac{9}{4}-6+9=\frac{21}{4}$, $Q=-\frac{9}{4}+3+3=\frac{15}{4}$, skirtumas $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ ✓

Kvadratinis daugianaris

4 tema: diskriminantas ir ekstremumo formulės

1. Iš kur h ir k? (2 ir 3 temos)

Išskiriame pilnąjį kvadratą (2 tema):

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Lyginame su pavidalu $a(x-h)^2+k$ (3 tema):

$$a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$\boxed{h=-\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{k=-\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

Kodėl **minusas** prie h? $x+\frac{b}{2a}=x-\left(-\frac{b}{2a}\right)$, kaip $(x+4)^2=(x-(-4))^2$ 3 temoje.

2. Diskriminantas D

Skaitiklyje vis kartojasi reiškinys b^2-4ac, todėl jis turi vardą:

$$\boxed{D=b^2-4ac}$$ – **diskriminantas**

(lot. *discriminare* – „atskirti“: jo ženklas atskiria atvejus.)

Pavyzdžiai (D gali būti bet kokio ženklo):

x^2-5x+6: $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1>0$

$2x^2-4x+2$: $D=(-4)^2-4\cdot2\cdot2=0$

$-x^2+2x-5$: $D=2^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-16<0$

Koeficientus įrašome **su ženklais** ir skliaustuose: čia $a=-1$, ne 1; $(-5)^2=25$, ne -25.

Ekstremumo formulės

$$x_\text{e}=-\frac{b}{2a}, \qquad P_\text{e}=-\frac{D}{4a}, \qquad D=b^2-4ac$$

3. Formulės

Pilnojo kvadrato pavidalas su diskriminantu:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

Todėl (3 tema: ekstremumo taškas h, ekstremumas k):

$$\boxed{x_\text{e}=h=-\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{P_\text{e}=k=-\frac{D}{4a}}$$

$a>0$ (minimumas)	$a<0$ (maksimumas)
$x_\text{min}=-\frac{b}{2a}$, $P_\text{min}=-\frac{D}{4a}$	$x_\text{max}=-\frac{b}{2a}$, $P_\text{max}=-\frac{D}{4a}$

Kitas būdas rasti P_e: įrašyti x_e į daugianarį, $P_\text{e}=P(x_\text{e})$.

4. Pavyzdžiai

$P(x)=2x^2-8x+3$ $\quad(a=2,\ b=-8,\ c=3)$

$x_\text{e}=-\frac{-8}{2\cdot2}=2$, $\quad D=(-8)^2-4\cdot2\cdot3=40$,

$P_\text{e}=-\frac{40}{4\cdot2}=-5$. Patikra: $P(2)=8-16+3=-5$ ✓

$a=2>0 \Rightarrow \boxed{x_\text{min}=2,\ P_\text{min}=-5}$

$Q(x)=-x^2+2x-5$ $\quad(a=-1,\ b=2,\ c=-5)$

$x_\text{e}=-\frac{2}{2\cdot(-1)}=1$, $\quad D=2^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-16$,

$Q_\text{e}=-\frac{-16}{4\cdot(-1)}=-4$. $\quad$ Patikra: $Q(1)=-4$ ✓

$a=-1<0 \Rightarrow \boxed{x_\text{max}=1,\ Q_\text{max}=-4}$

$-\frac{b}{2a}$: kai $b=-8$, tai $-b=8$.

5. Ką rodo a ir D ženklai? ($P_\text{e}=-\frac{D}{4a}$)

	$D<0$	$D=0$	$D>0$
$a>0$ (minimumas)	$P_\text{min}>0$	$P_\text{min}=0$	$P_\text{min}<0$
$a<0$ (maksimumas)	$P_\text{max}<0$	$P_\text{max}=0$	$P_\text{max}>0$

Pavyzdžiai:

x^2-5x+6: $\quad a>0, D=1>0 \Rightarrow P_\text{min}=-\frac{1}{4}$

$2x^2-4x+2$: $\quad D=0 \Rightarrow P_\text{min}=0$

$-x^2+2x-5$: $\quad a<0, D<0 \Rightarrow P_\text{max}=-4$

$P_\text{e}=0$ tada ir tik tada, kai $D=0$ $\quad$ (tuomet $P(x)=a(x-x_\text{e})^2$, pvz., $2x^2-4x+2=2(x-1)^2$).

Kvadratinis daugianaris

4 tema: diskriminantas ir ekstremumo formulės – 30 užduočių

Priminimas: kai $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir $a \neq 0$, tai $D = b^2 - 4ac$ (diskriminantas),

$$x_e = -\frac{b}{2a}, \qquad P_e = -\frac{D}{4a}, \qquad P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

$a > 0$: minimumas ($x_{min} = x_e$, $P_{min} = P_e$); $a < 0$: maksimumas ($x_{max} = x_e$, $P_{max} = P_e$). Ekstremumą galima rasti ir kitaip: $P_e = P(x_e)$.

1. Atpažink Nurodykite a, b, c ir apskaičiuokite diskriminantą D.

a) $x^2 - 7x + 10$ **c)** $3x^2 - 5$ **e)** $3 + x - 2x^2$

b) $-x^2 + 4x - 4$ **d)** $2x^2 + x + 1$ **f)** $(x - 3)(x + 1)$

2. Lentelė Užpildykite lentelę: raskite D, x_e, P_e ir ekstremumo rūšį (minimumas ar maksimumas).

a	b	c	D	x_e	P_e	rūšis
1	−4	3				
−1	6	−5				
2	4	5				
−3	0	12				

3. Apskaičiuok Raskite D, ekstremumo rūšį, ekstremumo tašką ir ekstremumą.

a) $x^2 + 6x + 5$ **c)** $-x^2 + 2x + 3$ **e)** $2x^2 + 3x$

b) $2x^2 - 12x + 10$ **d)** $-3x^2 + 6x - 3$ **f)** $x^2 + x + 1$

4. Rask klaidą Mokinys nagrinėja daugianarį $P(x) = -2x^2 + 8x - 3$:
„$D = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 40$; $x_e = \frac{b}{2a} = \frac{8}{-4} = -2$; $P_e = -\frac{40}{4 \cdot (-2)} = 5$; $a < 0$, todėl maksimumas.“
Raskite ir ištaisykite klaidą, o atsakymą patikrinkite apskaičiuodami $P(x_e)$.

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite (visuose teiginiuose $a \neq 0$).

a) Jei $b = 0$, tai $x_e = 0$.

b) Jei $a < 0$ ir $D > 0$, tai ekstremumas teigiamas.

c) Jei $D = 0$, tai ekstremumas lygus nuliui.

d) Jei $a > 0$ ir $D < 0$, tai minimumas neigiamas.

e) Jei daugianaris turi neigiamą minimumą, tai $D > 0$.

6. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo ekstremumo tašką ir ekstremumą $(x_e; P_e)$ dešinėje.

A) $x^2 - 4x + 7$	1) $(2; 3)$
B) $x^2 + 4x + 7$	2) $(-2; 3)$
C) $-x^2 + 4x - 7$	3) $(2; -3)$
D) $-x^2 - 4x - 7$	4) $(-2; -3)$

7. Pagal ženklus Apskaičiuokite D ir, *neskaičiuodami ekstremumo*, nustatykite ekstremumo rūšį ir ženklą (teigiamas, neigiamas ar lygus nuliui).

a) $2x^2 - x + 3$ **c)** $-3x^2 + x - 2$ **e)** $4x^2 - 4x + 1$

b) $-x^2 + 5x - 1$ **d)** $x^2 + x - 1$

8. Dviem būdais Ekstremumą raskite dviem būdais: pagal formulę $P_e = -\frac{D}{4a}$ ir įrašę x_e į daugianarį. Ar rezultatai sutampa?

a) $2x^2 - 12x + 7$ **b)** $3x^2 + 6x + 4$

9. Koeficientai iš reikšmių Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = 2$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 6$.

a) Raskite a, b, c ir D.

b) Raskite x_e ir P_e, nurodykite ekstremumo rūšį.

10. Tekstinis Sodininkas turi 40 m tvoros ir ja aptveria stačiakampį sklypą. Viena sklypo kraštinė lygi x m, kita – $(20 - x)$ m. Užrašykite sklypo plotą $S(x)$ standartiniu pavidalu, raskite a, b, c, D, o tada x_e ir didžiausią galimą plotą.

11. Parametras Raskite k, su kuriuo:

a) daugianario $x^2 + kx + 5$ ekstremumo taškas lygus 3;

b) daugianario $kx^2 - 8x + 1$ ekstremumo taškas lygus 2;

c) daugianario $2x^2 - 12x + k$ minimumas lygus -4.

12. Ekstremumas lygus nuliui Raskite k, su kuriuo ekstremumas lygus nuliui:

a) $x^2 + 6x + k$ **b)** $-2x^2 + 8x + k$ **c)** $kx^2 + 4x + 1$, $k \neq 0$

13. Du pavidalai Užrašykite pilnojo kvadrato pavidalu $a(x-h)^2+k$ ir palyginkite h, k su x_e, P_e, apskaičiuotais pagal formules.

a) $3x^2 - 12x + 14$ **b)** $-2x^2 + 4x + 1$

14. Atvirkščiai Daugianariai užrašyti pilnojo kvadrato pavidalu. Neatskliausdami nurodykite x_e, P_e ir ekstremumo rūšį; tada atskliauskite, raskite a, b, c, D ir patikrinkite formules.

a) $2(x + 3)^2 - 5$ **b)** $-(x - 4)^2 + 1$

15. Ar egzistuoja? Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris, tenkinantis šias sąlygas? Jei taip – pateikite pavyzdį, jei ne – paaiškinkite remdamiesi formule $P_e = -\frac{D}{4a}$.

a) $a > 0$, $D > 0$, $P_{min} > 0$;

b) $a < 0$, $D < 0$, $P_{max} > 0$;

c) $a > 0$, $D = 0$, $x_{min} = 2$;

d) $a < 0$, $D > 0$, $P_{max} > 0$;

e) $b = 0$, $a < 0$, $D < 0$, $P_{max} = -3$.

16. Sudaryk Sudarykite kvadratinį daugianarį, kurio $a = 2$, $x_{min} = 1$ ir $P_{min} = -8$. Patikrinkite apskaičiuodami $P(1)$.

17. Kas pasikeičia? Duotas daugianaris $P(x) = x^2 - 8x + 3$. Raskite jo D, x_e, P_e. Tada tuos pačius dydžius raskite daugianariams

a) $Q(x) = P(x) + 10$;

b) $R(x) = -P(x)$.

Ką pastebite?

18. Pirma suprastink Pirmiausia atskliauskite ir suprastinkite, o tada raskite D, x_e, P_e ir ekstremumo rūšį.

a) $(x-1)(x-5)+3$

b) $2(x-1)^2-(x-3)(x+1)$

19. Tekstinis Dviejų skaičių suma lygi 12. Pažymėję vieną iš jų x, užrašykite jų kvadratų sumą standartiniu pavidalu. Kokia mažiausia gali būti ši suma ir su kuriuo x ji gaunama?

20. Rask koeficientus Daugianario $P(x)=ax^2+bx+c$ reikšmės $P(0)=1$ ir $P(1)=-2$, o ekstremumo taškas $x_e=2$. Raskite a, b, c, D ir P_e.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Iššūkis Įrodykite, kad $P_e=c+\dfrac{b\,x_e}{2}$. Pritaikykite daugianariui $3x^2-12x+7$ ir patikrinkite pagal formulę $P_e=-\frac{D}{4a}$.

22. Parametras Duotas daugianaris $P(x)=x^2-2mx+m+6$.

a) Raskite visas m reikšmes, su kuriomis $P_{\min}=4$.

b) Su kuria m reikšme daugianario P minimumas didžiausias? Kam jis tada lygus?

23. Įrodymas Įrodykite: kvadratinis daugianaris ax^2+bx+c lygus $a(x-h)^2$ su kuriuo nors h (t. y. yra „pilnasis kvadratas“) tada ir tik tada, kai $D=0$. Su kuriomis p reikšmėmis tokį pavidalą turi daugianaris $4x^2+px+9$?

24. Įrodymas ir pavyzdys Duotas daugianaris $P(x)=ax^2+bx+c$.

a) Įrodykite: jei $ac<0$, tai $D>0$, o ekstremumo ženklas priešingas a ženklui.

b) Ar teisingas atvirkštinis teiginys: jei $D>0$, tai $ac<0$? Pagrįskite pavyzdžiu.

25. Dvi galimybės Raskite visus kvadratinius daugianarius ax^2+bx+c, kurių $x_e=-1$, $D=16$ ir $c=-3$. Kuris iš jų turi minimumą, kuris – maksimumą?

26. Tekstinis Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę $2x+3y=12$. Raskite didžiausią galimą sandaugą xy ir tuos x, y, su kuriais ji gaunama. Ar sandauga gali būti lygi 7?

27. Keitinys Raskite mažiausią reiškinio reikšmę ir visus x, su kuriais ji gaunama. Pasikartojančią dalį pažymėkite t ir pirmiausia išsiaiškinkite, kokias reikšmes gali įgyti t.

a) $(x^2-2x+3)(x^2-2x+5)$

b) $(x^2-4x+1)(x^2-4x+5)$

28. Spąstai Raskite mažiausią reikšmę ir visus x, su kuriais ji gaunama. Pažymėkite $t=x^2$ ir nepamirškite, kad $t\geq 0$.

a) x^4-6x^2+10 **b)** x^4+4x^2+7

29. Iššūkis Duoti daugianariai $P(x)=ax^2+bx+c$ ir $Q(x)=P(x+s)$ (s – bet kuris skaičius). Įrodykite, kad $D_Q=D_P$ ir $x_e(Q)=x_e(P)-s$. Patikrinkite, kai $P(x)=2x^2-8x+3$ ir $s=1$.

30. Iššūkis Skaičiai p ir q tenkina lygybę $p+q=8$. Daugianario x^2+px+q minimumą pažymėkime m. Išreikškite m per p ir raskite didžiausią galimą m reikšmę bei atitinkamus p ir q.

Atsakymai

1. a) $D = 9$ ($a = 1$, $b = -7$, $c = 10$). b) $D = 0$ (-1; 4; -4). c) $D = 60$ (3; 0; -5). d) $D = -7$ (2; 1; 1). e) $D = 25$ (-2; 1; 3). f) $x^2 - 2x - 3$: $D = 16$.

2. (D; x_e; P_e; rūšis): (4; 2; -1; min); (16; 3; 4; max); (-24; -1; 3; min); (144; 0; 12; max).

3. a) 16; min: -3; -4. b) 64; min: 3; -8. c) 16; max: 1; 4. d) 0; max: 1; 0. e) 9; min: $-\frac{3}{4}$; $-\frac{9}{8}$. f) -3; min: $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$.

4. Klaida: mokinys pamiršo minusą formulėje $x_\text{e} = -\frac{b}{2a}$. $x_\text{e} = -\frac{8}{-4} = 2$; $D = 40$ ir $P_\text{e} = 5$ teisingi, maksimumas. $P(2) = -8 + 16 - 3 = 5$.

5. a) T. b) T. c) T. d) K (minimumas teigiamas). e) T.

6. A–1, B–2, C–3, D–4.

7. a) $D = -23$: min, teigiamas. b) $D = 21$: max, teigiamas. c) $D = -23$: max, neigiamas. d) $D = 5$: min, neigiamas. e) $D = 0$: min, lygus 0.

8. a) $x_\text{e} = 3$, $D = 88$, $P_\text{e} = -11$, $P(3) = -11$. b) $x_\text{e} = -1$, $D = -12$, $P_\text{e} = 1$, $P(-1) = 1$. Sutampa.

9. a) $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$, $D = 1$. b) $x_\text{e} = \frac{3}{2}$, $P_\text{e} = -\frac{1}{4}$, minimumas.

10. $S = -x^2 + 20x$; $a = -1$, $b = 20$, $c = 0$, $D = 400$; $x_\text{e} = 10$; didžiausias plotas 100 m^2 (kvadratas 10×10).

11. a) $k = -6$. b) $k = 2$. c) $k = 14$.

12. a) $k = 9$. b) $k = -8$. c) $k = 4$.

13. a) $3(x - 2)^2 + 2$; $h = 2 = x_\text{e}$, $k = 2 = P_\text{e}$ ($D = -24$). b) $-2(x - 1)^2 + 3$; $h = 1 = x_\text{e}$, $k = 3 = P_\text{e}$ ($D = 24$).

14. a) $x_\text{e} = -3$, $P_\text{e} = -5$, min; $2x^2 + 12x + 13$, $D = 40$. b) $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = 1$, max; $-x^2 + 8x - 15$, $D = 4$.

15. a) Ne. b) Ne. c) Taip, pvz. $x^2 - 4x + 4$. d) Taip, pvz. $-x^2 + 1$. e) Taip, pvz. $-x^2 - 3$.

16. $2x^2 - 4x - 6$; $P(1) = -8$.

17. P: $D = 52$, $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = -13$. a) $D = 12$, $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = -3$. b) $D = 52$, $x_\text{e} = 4$, $P_\text{e} = 13$ (maksimumas).

18. a) $x^2 - 6x + 8$: $D = 4$, $x_\text{min} = 3$, $P_\text{min} = -1$. b) $x^2 - 2x + 5$: $D = -16$, $x_\text{min} = 1$, $P_\text{min} = 4$.

19. $x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$; mažiausia suma 72, kai $x = 6$.

20. $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $D = 12$, $P_\text{e} = -3$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus. $P_\text{e} = -5$.

22. a) $m = 2$ arba $m = -1$. b) $m = \frac{1}{2}$; minimumas $\frac{25}{4}$.

23. Įrodymas – žr. sprendimus. $p = 12$ arba $p = -12$.

24. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) Ne, pvz. $x^2 - 5x + 6$ ($D = 1 > 0$, bet $ac = 6 > 0$).

25. $x^2 + 2x - 3$ (minimumas) ir $-4x^2 - 8x - 3$ (maksimumas).

26. Didžiausia sandauga 6, kai $x = 3$, $y = 2$. Sandauga negali būti lygi 7.

27. a) Mažiausia reikšmė 8, kai $x = 1$. b) Mažiausia reikšmė -4, kai $x = 1$ arba $x = 3$.

28. a) Mažiausia reikšmė 1, kai $x = \sqrt{3}$ arba $x = -\sqrt{3}$. b) Mažiausia reikšmė 7, kai $x = 0$.

29. Įrodymas – žr. sprendimus.

30. $m = 8 - p - \frac{p^2}{4}$; didžiausia $m = 9$, kai $p = -2$, $q = 10$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Užrašykite bx_e naudodami $x_\mathrm{e} = -\frac{b}{2a}$ ir palyginkite $c + \frac{bx_\mathrm{e}}{2}$ su $-\frac{D}{4a}$.

22. $P_\mathrm{min} = -\frac{D}{4}$; išreikškite jį per m. Gausite kintamojo m kvadratinį reiškinį: a) prilyginkite jį 4 ir išskirkite pilnąjį kvadratą; b) ieškokite jo ekstremumo.

23. Pilnojo kvadrato pavidale $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$ kada antrasis dėmuo lygus nuliui? Atvirkščiai: jei $ax^2+bx+c = a(x-h)^2$, palyginkite koeficientus ir apskaičiuokite D.

24. Kai $ac < 0$, koks yra $-4ac$ ženklas? Ką tada galima pasakyti apie $D = b^2 - 4ac$? Atvirkštiniam teiginiui paneigti ieškokite pavyzdžio, kai $D > 0$ ir $ac > 0$.

25. Iš $x_\mathrm{e} = -1$ išreikškite b per a. Tada sąlyga $D = 16$ virsta lygtimi su vienu nežinomuoju a; ją spręskite išskirdami pilnąjį kvadratą.

26. Išreikškite y per x ir užrašykite xy kaip kintamojo x kvadratinį daugianarį.

27. Pažymėkite $t = x^2 - 2x$ (b dalyje $t = x^2 - 4x$). Išskirkite pilnąjį kvadratą ir raskite mažiausią t reikšmę. Tada reiškinys – kintamojo t kvadratinis daugianaris: ar jo t_e yra tarp galimų t reikšmių?

28. Kintamasis $t = x^2$ negali būti neigiamas. Raskite t_e ir patikrinkite, ar jis leistinas.

29. Atskliauskite $P(x + s)$ ir sutvarkykite pagal x laipsnius – gausite naujus a, b, c.

30. $m = q - \frac{p^2}{4}$. Iš $p + q = 8$ išreikškite q ir gautą reiškinį nagrinėkite kaip kintamojo p kvadratinį daugianarį.

Sprendimai (21–30)

21. $x_\text{e} = -\frac{b}{2a}$, todėl $bx_\text{e} = -\frac{b^2}{2a}$ ir $\frac{bx_\text{e}}{2} = -\frac{b^2}{4a}$. Tada

$$c + \frac{b\,x_\text{e}}{2} = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a} = P_\text{e}.$$

Pritaikymas: $a = 3$, $b = -12$, $c = 7$. $x_\text{e} = -\frac{-12}{6} = 2$, $P_\text{e} = 7 + \frac{-12\cdot 2}{2} = 7 - 12 = -5$. Patikra: $D = 144 - 84 = 60$, $-\frac{60}{12} = -5$ ✓

22. Čia $a = 1$, $b = -2m$, $c = m + 6$.
$D = (-2m)^2 - 4(m + 6) = 4m^2 - 4m - 24$, todėl $P_\text{min} = -\frac{D}{4} = -m^2 + m + 6$.
a) Prilyginame 4: $-m^2 + m + 6 = 4$, t. y. $m^2 - m - 2 = 0$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$, $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $m - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$, todėl $m = 2$ arba $m = -1$.
Patikra: $m = 2$: $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ ✓; $m = -1$: $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$ ✓
b) $P_\text{min} = -m^2 + m + 6$ yra kintamojo m kvadratinis daugianaris, kurio $a = -1 < 0$, todėl jis turi didžiausią reikšmę. $m_\text{e} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2}$, o didžiausia reikšmė lygi $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$ (arba $-\frac{D'}{4a}$, $D' = 1 + 24 = 25$, $\frac{25}{4}$ ✓).
Atsakymas: a) $m = 2$ arba $m = -1$; b) $m = \frac{1}{2}$, minimumas $\frac{25}{4}$.

23. Pilnojo kvadrato pavidalas: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$.
Jei $D = 0$**:** antrasis dėmuo lygus 0, todėl $ax^2 + bx + c = a\left(x - h\right)^2$ su $h = -\frac{b}{2a}$.
Atvirkščiai: tarkime, kad $ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 = ax^2 - 2ahx + ah^2$ su visais x. Atitinkami koeficientai lygūs: $b = -2ah$, $c = ah^2$. Tada $D = b^2 - 4ac = 4a^2h^2 - 4a \cdot ah^2 = 0$.
Taigi $D = 0$ tada ir tik tada, kai daugianaris užrašomas pavidalu $a(x - h)^2$.
$4x^2 + px + 9$: $D = p^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = p^2 - 144$. Reikia, kad $p^2 = 144$, todėl $p = 12$ arba $p = -12$.
Patikra: $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ ✓; $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ ✓

24. a) Jei $ac < 0$, tai $-4ac > 0$, o $b^2 \geq 0$, todėl $D = b^2 + (-4ac) > 0$. Ekstremumas $P_\text{e} = -\frac{D}{4a}$: skaitiklyje $-D < 0$ (nes $D > 0$). Kai $a > 0$, vardiklis teigiamas, todėl $P_\text{e} < 0$; kai $a < 0$, vardiklis neigiamas, todėl $P_\text{e} > 0$. Abiem atvejais ekstremumo ženklas priešingas a ženklui.
b) Ne. Pavyzdys: $x^2 - 5x + 6$ ($a = 1$, $b = -5$, $c = 6$): $D = 25 - 24 = 1 > 0$, bet $ac = 6 > 0$.

25. Iš $x_\text{e} = -\frac{b}{2a}$ gauname $b = -2ax_\text{e} = 2a$ (nes $x_\text{e} = -1$). Tada

$$D = b^2 - 4ac = (2a)^2 - 4a \cdot (-3) = 4a^2 + 12a.$$

$D = 16$: $4a^2 + 12a = 16$, t. y. $a^2 + 3a - 4 = 0$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = 0$, $\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $a + \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2}$, todėl $a = 1$ arba $a = -4$ (abu $\neq 0$).
$a = 1$: $b = 2$, daugianaris $x^2 + 2x - 3$. Patikra: $D = 4 + 12 = 16$ ✓, $x_\text{e} = -\frac{2}{2} = -1$ ✓. $a > 0$ – minimumas.
$a = -4$: $b = -8$, daugianaris $-4x^2 - 8x - 3$. Patikra: $D = 64 - 48 = 16$ ✓, $x_\text{e} = -\frac{-8}{-8} = -1$ ✓. $a < 0$ – maksimumas.
Atsakymas: $x^2 + 2x - 3$ (minimumas) ir $-4x^2 - 8x - 3$ (maksimumas).

26. Iš $2x + 3y = 12$ gauname $y = \frac{12 - 2x}{3}$, todėl $xy = \frac{12x - 2x^2}{3} = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$. Čia $a = -\frac{2}{3}$, $b = 4$, $c = 0$, $a < 0$ – yra maksimumas. $D = 16 - 0 = 16$. $x_\text{e} = -\frac{4}{2\cdot(-\frac{2}{3})} = -\frac{4}{-\frac{4}{3}} = 3$, $P_\text{e} = -\frac{16}{4\cdot(-\frac{2}{3})} = -\frac{16}{-\frac{8}{3}} = 6$. Tada $y = \frac{12 - 6}{3} = 2$.
Patikra: $3 \cdot 2 = 6$, $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ ✓
Kadangi $xy \leq 6$ su visais x, sandauga negali būti lygi 7.
Atsakymas: didžiausia sandauga 6 (kai $x = 3$, $y = 2$); lygi 7 ji būti negali.

27. a) $t = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$, o $t = -1$ tik tada, kai $x = 1$. Reiškinys: $(t + 3)(t + 5) = t^2 + 8t + 15$, $a = 1$, $b = 8$, $c = 15$, $D = 64 - 60 = 4$, $t_\text{e} = -4$, $P_\text{e} = -1$. Bet $t_\text{e} = -4 < -1$ – tokio t būti negali, todėl -1 nepasiekiama. Kadangi $t^2 + 8t + 15 = (t + 4)^2 - 1$ ir $t \geq -1$, tai $t + 4 \geq 3$, $(t + 4)^2 \geq 9$, todėl reiškinys ≥ 8, o lygybė gaunama, kai $t = -1$, t. y. $x = 1$. Patikra: $(1 - 2 + 3)(1 - 2 + 5) = 2 \cdot 4 = 8$ ✓

b) $t = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \geq -4$. Reiškinys: $(t+1)(t+5) = t^2 + 6t + 5$, $D = 36 - 20 = 16$, $t_\text{e} = -3 \geq -4$ – leistinas, $P_\text{e} = -4$ (min, nes $a = 1 > 0$). Kada $t = -3$? $(x-2)^2 - 4 = -3$, $(x-2)^2 = 1$, $x - 2 = \pm 1$, $x = 1$ arba $x = 3$. Patikra: $x = 1$: $(1-4+1)(1-4+5) = -2 \cdot 2 = -4$ ✓; $x = 3$: $(9-12+1)(9-12+5) = -2 \cdot 2 = -4$ ✓

Atsakymas: a) 8, kai $x = 1$; b) -4, kai $x = 1$ arba $x = 3$.

28. Pažymėję $t = x^2$ gauname $t^2 - 6t + 10$ ir $t^2 + 4t + 7$, bet $t \geq 0$.

a) $t^2 - 6t + 10$: $x_\text{e} = 3 \geq 0$, leistinas; $D = 36 - 40 = -4$, $P_\text{min} = 1$. $t = 3$ reiškia $x^2 = 3$, $x = \pm\sqrt{3}$. Patikra: $(\sqrt{3})^4 - 6 \cdot 3 + 10 = 9 - 18 + 10 = 1$ ✓

b) $t^2 + 4t + 7$: $x_\text{e} = -2 < 0$ – neleistinas (negali būti $x^2 = -2$), todėl $P_\text{min} = 3$ *nepasiekiamas*. Tiesiogiai: $x^4 \geq 0$ ir $4x^2 \geq 0$, todėl $x^4 + 4x^2 + 7 \geq 7$, o lygybė gaunama tik tada, kai $x = 0$.

Atsakymas: a) mažiausia reikšmė 1, kai $x = \pm\sqrt{3}$; b) mažiausia reikšmė 7, kai $x = 0$.

29. $Q(x) = a(x+s)^2 + b(x+s) + c = ax^2 + (2as + b)x + (as^2 + bs + c)$. Taigi $a_Q = a$, $b_Q = 2as + b$, $c_Q = as^2 + bs + c$. Tada

$$D_Q = (2as + b)^2 - 4a(as^2 + bs + c) = 4a^2s^2 + 4abs + b^2 - 4a^2s^2 - 4abs - 4ac = b^2 - 4ac = D_P.$$

$x_\text{e}(Q) = -\frac{2as+b}{2a} = -s - \frac{b}{2a}$. Čia $\frac{-b}{2a} = x_\text{e}(P)$, tad $x_\text{e}(Q) = x_\text{e}(P) - s$. ✓

Pavyzdys: $P = 2x^2 - 8x + 3$: $D = 64 - 24 = 40$, $x_\text{e} = 2$, $P_\text{e} = -5$. $Q(x) = 2(x+1)^2 - 8(x+1) + 3 = 2x^2 - 4x - 3$. $D_Q = 16 + 24 = 40$ ✓, $x_\text{e}(Q) = \frac{4}{4} = 1 = 2 - 1$ ✓, $P_\text{e}(Q) = -\frac{40}{8} = -5$ (ekstremumas nepasikeitė).

30. $m = q - \frac{p^2}{4}$ (nes $P_\text{min} = -\frac{D}{4}$, $D = p^2 - 4q$). Kadangi $q = 8 - p$:

$$m = 8 - p - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{4}p^2 - p + 8.$$

Tai kintamojo p kvadratinis daugianaris: $a = -\frac{1}{4} < 0$, $b = -1$, $c = 8$, todėl jis turi didžiausią reikšmę. $D = 1 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 8 = 1 + 8 = 9$. $p_\text{e} = -\frac{-1}{2 \cdot (-\frac{1}{4})} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$, $m_\text{e} = -\frac{9}{4 \cdot (-\frac{1}{4})} = 9$. Tada $q = 8 - (-2) = 10$. Patikra: $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$, minimumas 9 ✓

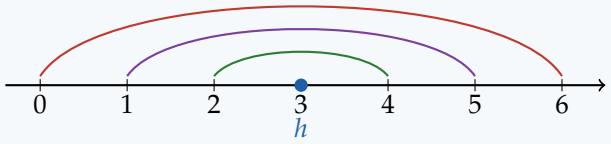
Atsakymas: didžiausias $m = 9$, kai $p = -2$, $q = 10$.

Kvadratinis daugianaris

5 tema: simetriškos reikšmės

1. Ką reiškia „simetriškos reikšmės“?

$P(x) = 2(x-3)^2 + 1$, ekstremumo taškas $h = 3$.



x:	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$:	19	9	3	1	3	9	19

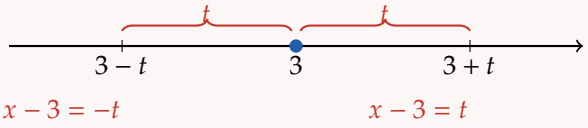
$P(2) = P(4) = 3$, $P(1) = P(5) = 9$, $P(0) = P(6) = 19$.

Skaičiai 2 ir 4 **vienodai nutolę** nuo $h = 3$ (po 1) – jie **simetriški** h **atžvilgiu**. Jų reikšmės **lygios**.

Kai du skaičiai vienodai nutolę nuo ekstremumo taško į abi puses, jų daugianario reikšmės **lygios**.

2. Kodėl $P(3+t) = P(3-t)$?

Vaizdas: daugianaris „mato“ tik skliaustą $x-3$ – **atstumą nuo 3 su ženklu**.



$x - 3 = -t$ $\qquad$ $x - 3 = t$

Skliaustas lygus t arba $-t$, o $(-t)^2 = t^2$ – kvadratas ženklą „pamiršta“.

Algebra:

$$P(3+t) = 2(3+t-3)^2 + 1 = 2t^2 + 1$$
$$P(3-t) = 2(3-t-3)^2 + 1 = 2(-t)^2 + 1 = 2t^2 + 1$$

Todėl $\boxed{P(3+t) = P(3-t)}$ su **kiekvienu** t.

Simetrija ekstremumo taško h atžvilgiu

$$P(h+t) = P(h-t) \qquad P(u) = P(v),\ u \neq v \ \Rightarrow\ h = \frac{u+v}{2}$$

3. Bendrai: $P(h+t) = P(h-t)$

Tegul $P(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ (h – ekstremumo taškas).

$$P(h+t) = a(h+t-h)^2 + k = at^2 + k$$
$$P(h-t) = a(h-t-h)^2 + k = a(-t)^2 + k = at^2 + k$$

$\boxed{P(h+t) = P(h-t) \text{ su kiekvienu } t}$

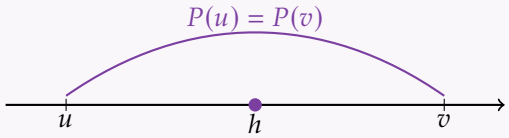
Kaip rasti simetrišką skaičių? Skaičiui u simetriškas h atžvilgiu skaičius yra

$$v = 2h - u \qquad (h \text{ – per vidurį tarp } u \text{ ir } v)$$

Pvz., $h = 3$, $u = 1$: $v = 6 - 1 = 5$, todėl $P(1) = P(5)$.

Lygybė teisinga ir tada, kai $a < 0$ (maksimumas), ir tada, kai $t < 0$.

4. Jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $h = \frac{u+v}{2}$



per vidurį

Įrodymas. $P(u) = P(v)$ reiškia

$$a(u-h)^2 + k = a(v-h)^2 + k \qquad -k,\ :a\ (a \neq 0)$$
$$(u-h)^2 = (v-h)^2 \qquad \text{lygūs kvadratai}$$

Skaičiai lygūs arba priešingi:

① $u - h = v - h \ \Rightarrow\ u = v$: ✗ atmetame ($u \neq v$);

② $u - h = -(v-h) \Rightarrow 2h = u + v \Rightarrow \boxed{h = \frac{u+v}{2}}$.

5. Taikymas

Ekstremumo taškas iš dviejų lygių reikšmių:

$P(1) = P(7) \ \Rightarrow h = \frac{1+7}{2} = 4$

$P(-4) = P(2) \Rightarrow h = \frac{-4+2}{2} = -1$

$P(0) = P(-6) \Rightarrow h = \frac{0+(-6)}{2} = -3$

Kodėl būtina $u \neq v$? $P(3) = P(3)$ teisinga visada, todėl apie h nieko nesako.

Ryšys su 4 tema: $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$P(0) = c, \qquad P\left(-\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{a^2} - b \cdot \frac{b}{a} + c = c.$$

Taigi $P(0) = P\left(-\frac{b}{a}\right)$, todėl (kai $b \neq 0$)

$$h = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a} \quad \checkmark$$

Ta pati formulė kaip $x_e = -\frac{b}{2a}$ – gauta **neišskiriant** pilnojo kvadrato.

Kvadratinis daugianaris

5 tema: simetriškos reikšmės – 30 užduočių

Priminimas: ekstremumo taškas h. $P(h+t) = P(h-t)$ su kiekvienu t. Jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $h = \dfrac{u+v}{2}$. Skaičiui u simetriškas h atžvilgiu yra $v = 2h - u$. Taip pat $h = x_e = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Atpažink Daugianario ekstremumo taškas $h = 4$. Kurios skaičių poros yra simetriškos h atžvilgiu?

a) 1 ir 7 **b)** 2 ir 6 **c)** 0 ir 9 **d)** -1 ir 9 **e)** 3 ir 6 **f)** -2 ir 10 **g)** 1,5 ir 6,5 **h)** 4 ir 5

2. Apskaičiuok Raskite skaičių $v = 2h - u$, kuris h atžvilgiu simetriškas skaičiui u:

a) $h = 5,\ u = 2$ **b)** $h = 5,\ u = 7$ **c)** $h = 5,\ u = -1$ **d)** $h = -2,\ u = 1$ **e)** $h = -2,\ u = -6$ **f)** $h = \frac{1}{2},\ u = 3$

3. Lentelė Duotas $P(x) = (x-2)^2 + 3$. Užpildykite lentelę, tada nurodykite, su kuriais x reikšmės $P(x)$ lygios ir kam lygus h.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$P(x)$							

4. Neatskliausk! Duotas $P(x) = 3(x-4)^2 - 5$. Neatskliausdami apskaičiuokite $P(6)$, $P(2)$, $P(9)$, $P(-1)$ ir $P(4+t)$. Ką pastebite?

5. Teisinga ar klaidinga? Duotas $P(x) = -2(x+1)^2 + 5$ (ekstremumo taškas $h = -1$). Pagrįskite.

a) $P(0) = P(-2)$
b) $P(2) = P(-4)$
c) $P(1) = P(-1)$
d) $P(-1+t) = P(-1-t)$ su kiekvienu t
e) Kadangi $a < 0$, simetrijos nėra.

6. Rask klaidą Mokinys samprotauja: „$P(3) = P(11)$, todėl ekstremumo taškas $h = \frac{3-11}{2} = -4$.“ Kur klaida? Raskite teisingą h ir patikrinkite su daugianariu $P(x) = x^2 - 14x + 5$.

7. Rask h Raskite daugianario P ekstremumo tašką h, jei:

a) $P(1) = P(9)$ **b)** $P(-3) = P(5)$ **c)** $P(-8) = P(-2)$ **d)** $P\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}\right)$

8. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite dešinėje lygybę, kuri jam teisinga ($u \neq v$).

A) $x^2 - 6x + 1$
B) $x^2 + 6x$
C) $x^2 - 2x + 5$
D) $-x^2 + 4x$

1) $P(-5) = P(-1)$
2) $P(-1) = P(3)$
3) $P(0) = P(4)$
4) $P(2) = P(4)$

9. Pasinaudok simetrija Duotas $P(x) = x^2 - 8x + 3$. Žinoma, kad $P(1) = -4$, $P(2) = -9$, $P(-1) = 12$. Neskaičiuodami raskite $P(7)$, $P(6)$, $P(9)$. Vieną iš jų patikrinkite tiesiogiai.

10. Tekstinis Kamuolys metamas aukštyn; jo aukštis (metrais) po t sekundžių lygus $P(t) = -5t^2 + 20t$.

a) Po kiek sekundžių aukštis toks pat kaip po 1 s? Patikrinkite.
b) Kada kamuolys būna aukščiausiai ir koks tada jo aukštis?
c) Metimo momentu $P(0) = 0$. Kada aukštis vėl bus lygus 0?

d) Kada aukštis toks pat kaip po 0,5 s? Koks tas aukštis?

11. Su 4 tema Duotas $P(x) = 2x^2 - 12x + 7$.

a) Raskite ekstremumo tašką $h = -\frac{b}{2a}$.

b) Raskite skaičius, h atžvilgiu simetriškus skaičiams 5, -1 ir 3,5.

c) Patikrinkite, kad $P(5)$ lygi P reikšmei simetriškame taške.

d) Raskite ekstremumą P_e ir jo rūšį.

12. Rask koeficientus Daugianariui $P(x) = x^2 + bx + c$ galioja lygybės $P(1) = P(7)$ ir $P(0) = 5$. Raskite b ir c.

13. Parametras Raskite m, jei:

a) daugianario $P(x) = x^2 + (m-3)x + 5$ ekstremumo taškas $h = 4$;

b) daugianariui $P(x) = 3x^2 - (m+1)x + 2$ galioja $P(1) = P(5)$.

14. Ar egzistuoja? Ar gali egzistuoti kvadratinis daugianaris P, kuriam:

a) $P(1) = P(4) = P(6)$;

b) $P(2) = P(8)$, o ekstremumo taškas $h = 4$;

c) $P(0) = P(6)$, o ekstremumo taškas $h = 3$?

Atsakymą pagrįskite.

15. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus kvadratinius daugianarius, kuriems $P(2) = P(10)$ ir $P(0) = 5$. Užrašykite juos standartiniu pavidalu ir patikrinkite.

16. Gudriai Be skaičiuotuvo apskaičiuokite:

a) $P(1234) - P(-1230)$, kai $P(x) = x^2 - 4x + 9$;

b) $P(500) - P(-504)$, kai $P(x) = 3x^2 + 12x - 1$;

c) $P(10) - P(-4)$, kai $P(x) = x^2 - 4x$.

17. Iš pilnojo kvadrato Duota $P(x) = x^2 - 10x + 13$.

a) Išskirkite pilnąjį kvadratą.

b) Raskite ekstremumo tašką, ekstremumo rūšį ir P_e.

c) Kuri kita reikšmė lygi $P(-1)$? Patikrinkite apskaičiuodami abi.

18. Poros Daugianario P ekstremumo taškas $h = 5$. Iš skaičių 0; 1; 3; 5; 7; 9; 10 sudarykite poras, kuriose P reikšmės lygios. Kuris skaičius lieka be poros ir kodėl?

19. Dviem būdais Duota $P(x) = 4x^2 - 24x + 5$.

a) Raskite h pagal formulę $x_e = -\frac{b}{2a}$.

b) Raskite h kitaip: žinodami, kad $P(0) = c$, raskite kitą skaičių su ta pačia reikšme ir imkite abiejų skaičių vidurkį.

c) Raskite P_e dviem būdais: kaip $P(h)$ ir pagal formulę $-\frac{D}{4a}$.

20. Iššūkis Neišskirdami pilnojo kvadrato, tiesiogiai įrodykite: jei $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ir $h = -\frac{b}{2a}$, tai $P(h+t) = P(h-t)$ su kiekvienu t.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Iš reikšmių lygybės Duota $P(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Įrodykite: jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $u + v = -\frac{b}{a}$.

b) Su kuriuo b daugianario $2x^2 + bx + 1$ reikšmės taškuose -1 ir 4 lygios?

22. Rask a, h, k Daugianario $P(x) = a(x-h)^2 + k$ reikšmės: $P(-1) = P(7) = -25$ ir $P(2) = 5$. Raskite a, h, k.

23. Trys reikšmės Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = P(6) = 8$ ir $P(1) = -2$. Raskite a, b, c, ekstremumo rūšį ir ekstremumą P_e.

24. Dvi vietos Duotas $P(x) = x^2 - 8x + 3$. Raskite visas m reikšmes, su kuriomis $P(m-1) = P(3m+1)$. Išnagrinėkite visus atvejus.

25. Netikėta lygybė Duotas $P(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Įrodykite: jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $P(u+v) = P(0)$.

b) Patikrinkite su $P(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $u = 1$, $v = 3$.

26. Ar egzistuoja? Įrodykite: kvadratinis daugianaris negali įgyti tos pačios reikšmės trijuose *skirtinguose* taškuose, t. y. nėra tokių skirtingų u, v, w, kad $P(u) = P(v) = P(w)$.

27. Arčiau ar toliau Duotas $P(x) = a(x-h)^2 + k$, $a > 0$.

a) Įrodykite: jei u yra arčiau h nei v (atstumas $|u-h|$ mažesnis už $|v-h|$), tai $P(u) < P(v)$.

b) Daugianario $P(x) = x^2 - 6x + 11$ reikšmes $P(2{,}5)$, $P(4{,}1)$, $P(0)$, $P(5{,}5)$ išdėstykite didėjimo tvarka *jų neskaičiuodami*, o paskui patikrinkite apskaičiuodami.

28. Tapatybė Kvadratiniam daugianariui $P(x) = ax^2 + bx + c$ su *visais* x galioja lygybė $P(x) = P(8-x)$. Įrodykite, kad $b = -8a$, ir raskite ekstremumo tašką. Kaip tai susiję su simetrija?

29. Tekstinis Turime 20 m tvoros ir norime aptverti stačiakampį. Viena kraštinė – x m, kita – $(10-x)$ m, plotas – $S(x) = x(10-x)$.

a) Užrašykite $S(x)$ pavidalu $ax^2 + bx + c$. Raskite ekstremumo tašką, ekstremumo rūšį ir S_e.

b) Neskaičiuodami nustatykite, su kuriuo x plotas toks pat kaip su $x = 3$ ir kaip su $x = 2{,}5$.

c) Įrodykite, kad $S(5+t) = 25 - t^2$. Kodėl iš to išplaukia, kad 25 – didžiausias plotas?

30. Iššūkis Kvadratinio daugianario P ekstremumo taškas yra h, o s – bet kuris skaičius. Pažymėkime $Q(x) = P(x+s)$.

a) Remdamiesi simetrija įrodykite, kad daugianario Q ekstremumo taškas yra $h - s$.

b) Patikrinkite su $P(x) = 2x^2 - 8x + 3$ ir $s = -5$: atskliauskite $Q(x) = P(x-5)$, raskite $-\frac{b}{2a}$ ir palyginkite.

Atsakymai

1. Taip: a), b), d), f), g). Ne: c), e), h).

2. a) 8. b) 3. c) 11. d) -5. e) 2. f) -2.

3. 12; 7; 4; 3; 4; 7; 12. Lygios: $P(-1) = P(5)$, $P(0) = P(4)$, $P(1) = P(3)$; $h = 2$.

4. $P(6) = P(2) = 7$, $P(9) = P(-1) = 70$, $P(4+t) = 3t^2 - 5$.

5. a) T. b) T. c) K. d) T. e) K.

6. Reikia sudėti: $h = \frac{3+11}{2} = 7$. Patikra: $P(3) = P(11) = -28$.

7. a) 5. b) 1. c) -5. d) $\frac{3}{2}$.

8. A–4, B–1, C–2, D–3.

9. $P(7) = -4$, $P(6) = -9$, $P(9) = 12$.

10. a) po 3 s (15 m). b) po 2 s; 20 m. c) po 4 s. d) po 3,5 s; 8,75 m.

11. a) $h = 3$. b) 1; 7; 2,5. c) $P(5) = P(1) = -3$. d) minimumas, $P_\text{e} = -11$.

12. $b = -8$, $c = 5$.

13. a) $m = -5$. b) $m = 17$.

14. a) Ne. b) Ne ($h = 5$). c) Taip.

15. Pvz. $x^2 - 12x + 5$ ir $2x^2 - 24x + 5$.

16. a) 0. b) 0. c) 28.

17. a) $(x-5)^2 - 12$. b) minimumas, $h = 5$, $P_\text{e} = -12$. c) $P(11)$; abi lygios 24.

18. Poros: $(0;10)$, $(1;9)$, $(3;7)$. Be poros lieka 5, nes tai pats h.

19. a) 3. b) 0 ir 6, $h = 3$. c) -31.

20. Įrodymas – žr. sprendimus.

21. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $b = -6$.

22. $a = -2$, $h = 3$, $k = 7$; $P(x) = -2(x-3)^2 + 7$.

23. $a = 2$, $b = -12$, $c = 8$; minimumas, $P_\text{e} = -10$.

24. $m = 2$ arba $m = -1$.

25. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $P(4) = P(0) = 5$.

26. Įrodymas – žr. sprendimus.

27. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $P(2{,}5) < P(4{,}1) < P(5{,}5) < P(0)$.

28. $b = -8a$, $h = 4$.

29. a) $S = -x^2 + 10x$; maksimumas, $h = 5$, $S_\text{e} = 25$. b) $x = 7$ ir $x = 7{,}5$. c) Įrodymas – žr. sprendimus.

30. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $Q(x) = 2x^2 - 28x + 93$, $h_Q = 7 = h - s$ ($h = 2$).

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. a) Panaudokite $h = \frac{u+v}{2}$ ir $h = -\frac{b}{2a}$. b) Čia $a = 2$, $u = -1$, $v = 4$.

22. Iš $P(-1) = P(7)$ raskite h. Iš $P(2)$ ir $P(-1)$ gausite dvi lygtis su a ir k.

23. Iš $P(0) = P(6)$ raskite h, tada koeficientą b išreikškite koeficientu a ($h = -\frac{b}{2a}$). Laisvasis narys $c = P(0)$.

24. Galimi du atvejai: argumentai sutampa arba skiriasi. Kai skiriasi, $h = \frac{u+v}{2}$.

25. Pasinaudokite 21 a) uždavinio rezultatu $u + v = -\frac{b}{a}$ ir apskaičiuokite $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

26. Jei $P(u) = P(v) = P(w)$, tai $h = \frac{u+v}{2}$ ir $h = \frac{u+w}{2}$.

27. a) Palyginkite $(u-h)^2$ ir $(v-h)^2$, tada padauginkite iš $a > 0$. b) Raskite h ir atstumus iki jo.

28. Atskliauskite $P(8-x)$ ir palyginkite koeficientus prie x. Ekstremumo taškas – $h = \frac{x+(8-x)}{2}$.

29. b) Simetrija: kurį skaičių pridėję prie 3 gausite 10? c) Atskliauskite $(5+t)(5-t)$.

30. a) $Q(h-s+t) = P(h+t)$. b) $Q(x) = 2(x-5)^2 - 8(x-5) + 3$.

Sprendimai (21–30)

21. a) Kadangi $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, pagal 5 temos taisyklę $h = \frac{u+v}{2}$. Kita vertus, $h = -\frac{b}{2a}$ (4 tema). Todėl

$$\frac{u+v}{2} = -\frac{b}{2a} \;\Rightarrow\; u+v = -\frac{b}{a}.$$

b) Čia $a = 2$, $u = -1$, $v = 4$: $u + v = 3 = -\frac{b}{2}$, todėl $b = -6$.
Atsakymas: $b = -6$. Patikra: $P(-1) = 2 + 6 + 1 = 9$, $P(4) = 32 - 24 + 1 = 9$ ✓

22. Iš $P(-1) = P(7)$: $h = \frac{-1+7}{2} = 3$, todėl $P(x) = a(x-3)^2 + k$.

- $P(2) = a(2-3)^2 + k = a + k = 5$;
- $P(-1) = a(-1-3)^2 + k = 16a + k = -25$.

Iš antrosios lygybės atėmę pirmąją, gauname $15a = -30$, todėl $a = -2$, o $k = 5 - a = 7$.
Atsakymas: $P(x) = -2(x-3)^2 + 7$. Patikra: $P(7) = -2 \cdot 16 + 7 = -25$ ✓

23. Iš $P(0) = P(6)$: $h = 3$. Kadangi $h = -\frac{b}{2a} = 3$, tai $b = -6a$. Be to, $c = P(0) = 8$. Tada $P(1) = a + b + c = a - 6a + 8 = -5a + 8 = -2$, todėl $a = 2$ ir $b = -12$. Kadangi $a = 2 > 0$, ekstremumas – minimumas, o $P_\text{e} = P(3) = 18 - 36 + 8 = -10$.
Atsakymas: $P(x) = 2x^2 - 12x + 8$, minimumas, $P_\text{e} = -10$. Patikra: $P(6) = 72 - 72 + 8 = 8$ ✓, $-\frac{D}{4a} = -\frac{144-64}{8} = -10$ ✓

24. Galimi du atvejai.

- Argumentai sutampa: $m - 1 = 3m + 1$, todėl $m = -1$. Tada abu argumentai lygūs -2, o lygybė $P(-2) = P(-2)$ savaime teisinga.
- Argumentai skiriasi. Tada $h = \frac{(m-1)+(3m+1)}{2} = 2m$. Čia $h = -\frac{-8}{2} = 4$, todėl $2m = 4$, $m = 2$.

Patikra, kai $m = 2$: $P(1) = 1 - 8 + 3 = -4$, $P(7) = 49 - 56 + 3 = -4$ ✓
Atsakymas: $m = 2$ (arba trivialus $m = -1$).

25. a) Pagal 21 a) uždavinį, jei $P(u) = P(v)$ ir $u \neq v$, tai $u + v = -\frac{b}{a}$. Todėl

$$P(u+v) = P\left(-\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{a^2} - b \cdot \frac{b}{a} + c = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c = c = P(0).$$

b) $P(1) = 3 - 12 + 5 = -4$, $P(3) = 27 - 36 + 5 = -4$ – lygios. Čia $u + v = 4$: $P(4) = 48 - 48 + 5 = 5 = P(0)$ ✓

26. Tarkime, kad $P(u) = P(v) = P(w)$, o skaičiai u, v, w skirtingi. Iš $P(u) = P(v)$, $u \neq v$: $h = \frac{u+v}{2}$. Iš $P(u) = P(w)$, $u \neq w$: $h = \frac{u+w}{2}$. Todėl $\frac{u+v}{2} = \frac{u+w}{2}$, t. y. $v = w$ – prieštara, nes $v \neq w$. **Išvada:** tokių trijų skirtingų skaičių nėra. Kitaip tariant, kiekvienas skaičius u turi tik vieną „porą“ $2h - u$.

27. a) Užrašome $P(x) = a(x-h)^2 + k$. Atstumai iki h neneigiami, o iš dviejų neneigiamų skaičių mažesniojo kvadratas irgi mažesnis: $|u-h| < |v-h| \;\Rightarrow\; (u-h)^2 < (v-h)^2$. Dauginame iš $a > 0$ ir pridedame k: $a(u-h)^2 + k < a(v-h)^2 + k$, t. y. $P(u) < P(v)$.
b) $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$, $h = 3$. Atstumai iki h: 2,5: 0,5; 4,1: 1,1; 5,5: 2,5; 0: 3. Kuo skaičius arčiau h, tuo reikšmė mažesnė, todėl $P(2{,}5) < P(4{,}1) < P(5{,}5) < P(0)$. Patikra: 2,25; 3,21; 8,25; 11 ✓

28. Atskliaudžiame: $P(8-x) = a(8-x)^2 + b(8-x) + c = ax^2 - 16ax + 64a + 8b - bx + c$. Lyginame su $P(x) = ax^2 + bx + c$. Koeficientai prie x: $-16a - b = b$, todėl $b = -8a$. (Laisvieji nariai: $64a + 8b + c = c$, o $64a + 8(-8a) = 0$ ✓.) Ekstremumo taškas: $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8a}{2a} = 4$. Ryšys su simetrija: skaičiuose x ir $8 - x$ daugianario reikšmės lygios, o šių skaičių vidurkis $\frac{x+(8-x)}{2} = 4$ ir yra h.
Atsakymas: $b = -8a$, $h = 4$.

29. a) $S = x(10-x) = -x^2 + 10x$: $a = -1 < 0$ – maksimumas; $h = -\frac{10}{-2} = 5$; $S_\text{e} = S(5) = 25$ (patikra: $D = 100$, $-\frac{D}{4a} = 25$ ✓).

b) Simetrišką skaičių randame iš formulės $v = 2h - u = 10 - u$: kai $u = 3,\ v = 7$; kai $u = 2{,}5,\ v = 7{,}5$. Patikra: $S(3) = 21 = S(7)$ ✓.
c) $S(5 + t) = (5 + t)(10 - 5 - t) = (5 + t)(5 - t) = 25 - t^2$. Kadangi $t^2 \geq 0$, reiškinys $25 - t^2$ niekada nebūna didesnis už 25, o kai $t = 0$, jis lygus 25. Todėl 25 yra didžiausias plotas (kai $x = 5$, sklypas – kvadratas 5×5).

30. a) Kadangi h yra ekstremumo taškas, $P(h+t) = P(h-t)$. Todėl $Q(h-s+t) = P(h-s+t+s) = P(h+t)$ ir $Q(h - s - t) = P(h - s - t + s) = P(h - t)$. Šios reikšmės lygios, t. y. $Q(h - s + t) = Q(h - s - t)$ su kiekvienu t. Taigi Q reikšmės simetriškos taško $h - s$ atžvilgiu, todėl daugianario Q ekstremumo taškas yra $h - s$.
b) Čia $h = -\frac{-8}{4} = 2$ ir $s = -5$, todėl turi būti $h_Q = 2 - (-5) = 7$. Patikriname tiesiogiai:

$$Q(x) = 2(x - 5)^2 - 8(x - 5) + 3 = 2x^2 - 20x + 50 - 8x + 40 + 3 = 2x^2 - 28x + 93,$$

$-\frac{b}{2a} = \frac{28}{4} = 7$ ✓

Kvadratinis daugianaris

6 tema: kvadratinio daugianario šaknys

1. Kai $b = 0$: $ax^2 + c = 0$

Išreiškiame x^2:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 = -\frac{c}{a}}$$

$2x^2 - 18 = 0$	$x^2 = 9$	$x = \pm 3$ **(dvi šaknys)**
$-2x^2 = 0$	$x^2 = 0$	$x = 0$ **(viena šaknis)**
$x^2 + 4 = 0$	$x^2 = -4$	**šaknų nėra**, nes $x^2 \geq 0$

Iš $x^2 = 9$ – **dvi** šaknys: 3 ir -3.

2. Kai $c = 0$, $b \neq 0$: $ax^2 + bx = 0$

Iškeliame bendrąjį daugiklį x:

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

Sandauga lygi 0, kai **bent vienas** daugiklis lygus 0:

$$x = 0 \quad \text{arba} \quad ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Pvz. $3x^2 - 12x = 0$

$$3x(x - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ arba } x = 4}$$

Patikra: $3 \cdot 0 - 0 = 0$, $3 \cdot 16 - 48 = 0$ ✓

× Negalima dalyti iš x: $3x^2 = 12x \Rightarrow 3x = 12$ – taip **prarandame** šaknį $x = 0$.

Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ šaknys

r – **šaknis**, jei $P(r) = 0$. Šaknis randame spręsdami lygtį $P(x) = 0$.

$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ – **daugianario šaknys**: $P(x_1) = P(x_2) = 0$

3. Pilnoji lygtis (visi $a, b, c \neq 0$)

$P(x) = 3x^2 + 5x - 2$, sprendžiame $P(x) = 0$:

①	$3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{12} = 0$	pilnasis kvadratas
②	$3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{12}$	laisvąjį narį į dešinę
③	$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$	dalijame iš $a = 3$
④	$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{7}{6}$	$\frac{49}{36} > 0$
⑤	$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}$	

$P(x)$ šaknys: $\boxed{x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2}$

①: $3\left(x^2 + \frac{5}{3}x\right) - 2 = 3\left(\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) - 2$

Patikra: $P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0$, $P(-2) = 12 - 10 - 2 = 0$

Tie patys žingsniai ①–⑤ su raidėmis – 4 šakoje.

4. Šaknų formulės išvedimas

$P(x) = 0$, t. y. $ax^2 + bx + c = 0$:

①	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = 0$	4 tema
②	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a}$	į dešinę
③	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$	dalijame iš a
④	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$	kai $D \geq 0$
⑤	$x = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$	$D = b^2 - 4ac$

④ kaip $x^2 = t$ (1 šakoje): reikia $D \geq 0$.

5. To paties $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$ šaknys pagal formulę

① koeficientai: $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$

② $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$

③ $D = 49 > 0$ – dvi šaknys, $\sqrt{D} = 7$

④ $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 7}{6}$

⑤ $P(x)$ šaknys: $x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{-12}{6} = -2$ ✓

Kiek šaknų? Tai lemia $\sqrt{D}$ formulėje $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$:

$D > 0$: $\sqrt{D} > 0$ – **dvi** šaknys (su „+“ ir su „−“)

$D = 0$: $\sqrt{D} = 0$ – **viena** šaknis $x = -\frac{b}{2a}$

$D < 0$: $\sqrt{D} \notin \mathbb{R}$ – realiųjų šaknų **nėra**

Pvz., $4x^2 + 4x + 1$: $D = 0$, $x = -\frac{1}{2}$; $x^2 + x + 1$: $D = -3$, šaknų nėra.

Kvadratinis daugianaris

6 tema: kvadratinio daugianario šaknys – 30 užduočių

Skaičius r yra **šaknis**, jei $P(r) = 0$. Kai $b = 0$: $x^2 = -\frac{c}{a}$. Kai $c = 0$: $x(ax + b) = 0$. Bendru atveju: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$. $D > 0$ – dvi šaknys; $D = 0$ – viena šaknis $x = -\frac{b}{2a}$; $D < 0$ – realiųjų šaknų nėra.

1. Atpažink Ar nurodytas skaičius yra daugianario šaknis? Patikrinkite įrašydami.

a) $x^2 - 2x - 3,\ r = 3$
b) $x^2 - 2x - 3,\ r = -1$
c) $x^2 - 2x - 3,\ r = 1$
d) $2x^2 + x - 6,\ r = \frac{3}{2}$
e) $2x^2 + x - 6,\ r = -2$
f) $2x^2 + x - 6,\ r = 2$

2. Kai $b = 0$ Raskite šaknis arba pagrįskite, kad jų nėra. Pirmiausia išreikškite x^2.

a) $x^2 - 49$
b) $3x^2 - 75$
c) $4x^2 + 1$
d) $9x^2 - 16$
e) $-2x^2 + 18$
f) $5x^2$

3. Kai $c = 0$ Iškelkite x prieš skliaustus ir raskite šaknis.

a) $x^2 - 7x$
b) $3x^2 + 6x$
c) $-2x^2 + 8x$
d) $4x^2 - x$

4. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite (klaidingam teiginiui pateikite pavyzdį).

a) Jei $P(r) = 0$, tai r yra daugianario P šaknis.
b) Skaičius -3 yra daugianario $x^2 + 9$ šaknis.
c) Kiekvienas daugianaris $ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) turi šaknį 0.
d) Jei $P(0) \neq 0$, tai daugianaris P šaknų neturi.
e) Daugianaris $3x^2 + 5$ turi dvi šaknis.
f) Jei skaičius r yra daugianario šaknis, tai ir $-r$ yra jo šaknis.

5. Rask klaidą Mokinys sprendžia: $5x^2 = 20x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$, ir teigia, kad 4 yra vienintelė daugianario $5x^2 - 20x$ šaknis. Kur klaida? Raskite visas šaknis.

6. Rask klaidą Mokinys ieško daugianario $x^2 - 6x + 5$ šaknų pagal formulę:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16, \qquad x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -5.$$

Patikrinkite įrašydami, raskite klaidą ir pataisykite.

7. Sugretink Kiekvienam daugianariui kairėje parinkite jo šaknis dešinėje.

A) $x^2 - 6x + 9$
B) $x^2 - 6x + 8$
C) $x^2 - 6x + 10$
D) $x^2 - 6x$

1) šaknys 2 ir 4
2) šaknų nėra
3) viena šaknis 3
4) šaknys 0 ir 6

8. Šaknų formulė Apskaičiuokite D ir raskite šaknis.

a) $x^2 - 7x + 10$
b) $2x^2 + 3x - 2$
c) $3x^2 - 2x - 1$
d) $-x^2 + 4x + 5$

9. Kiek šaknų? Šaknų neieškodami, pagal D nustatykite, kiek jų turi daugianaris.

a) $x^2 - 5x + 7$
b) $4x^2 - 12x + 9$
c) $2x^2 + x - 3$
d) $-x^2 + 2x - 5$

10. Koeficientai iš šaknų Raskite b ir c (sudarykite lygčių sistemą iš sąlygų $P(r) = 0$), jei:

a) daugianario $x^2 + bx + c$ šaknys yra 2 ir 5;
b) daugianario $2x^2 + bx + c$ šaknys yra 1 ir -3.

11. Parametras Raskite parametro reikšmę, su kuria:

a) skaičius 3 yra daugianario $x^2 + px - 12$ šaknis;
b) skaičius 2 yra daugianario $2x^2 - 5x + q$ šaknis.

b) dalyje raskite ir antrąją šaknį.

12. Išskirk ir išspręsk Išskirkite pilnąjį kvadratą, perkelkite laisvąjį narį ir raskite šaknis (arba pagrįskite, kad jų nėra).

a) $x^2 - 8x + 7$
b) $x^2 + 6x + 10$
c) $2x^2 - 4x - 6$
d) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

13. Tekstinis Stačiakampio formos sodo ilgis 5 m didesnis už plotį, o plotas lygus 24 m^2. Raskite sodo matmenis. Kodėl vienas iš gautų sprendinių netinka?

14. Lentelė Duotas daugianaris $x^2 - 4x + c$. Užpildykite lentelę.

c	D	šaknų skaičius	šaknys
0			
3			
4			
5			

15. Neatskliausk! Daugianariai jau užrašyti pilnojo kvadrato pavidalu. Neatskliausdami raskite jų šaknis (arba pagrįskite, kad jų nėra).

a) $3(x - 2)^2 - 12$
b) $-2(x + 1)^2 + 8$
c) $(x - 5)^2 + 4$
d) $5(x + 3)^2$

16. Ekstremumas ir šaknys Raskite ekstremumo tašką x_e ir ekstremumą, o remdamiesi jais pagrįskite, kiek šaknų turi daugianaris.

a) $x^2 - 6x + 12$ **b)** $-2x^2 + 4x - 5$ **c)** $3x^2 - 12x + 12$

17. Simetrija Žinoma, kad dvi daugianario šaknys simetriškos ekstremumo taško x_e atžvilgiu.

a) Daugianario $x^2 + bx + c$ šaknys yra 1 ir 7. Raskite x_e, b ir c.
b) Daugianaris $x^2 - 6x + c$ turi šaknį 1. Raskite c, o antrąją šaknį – pasinaudodami simetrija.

18. Sugalvok pats Sugalvokite po vieną kvadratinį daugianarį, kuris

a) turi šaknis 3 ir -3;
b) turi vienintelę šaknį 5 ir $b \neq 0$;
c) neturi realiųjų šaknų.

Kiekvienam apskaičiuokite D ir patikrinkite.

19. Gudriai Pažymėję $t = x^2$, išspręskite lygtis.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

20. Iššūkis Įrodykite: jei $D > 0$, tai daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknų x_1 ir x_2 vidurkis lygus ekstremumo taškui x_e. Patikrinkite su daugianariu $2x^2 - 8x + 6$.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis daugianaris $x^2 + mx + m + 3$ turi vienintelę šaknį? Raskite tą šaknį kiekvienu atveju.

22. Šaknys ir simetrija Daugianaris $P(x) = ax^2 + bx + c$ turi šaknis -1 ir 7, o $P(0) = -14$. Raskite a, b, c.

23. Šaknų atstumas Daugianario $2x^2 - 12x + c$ didesniosios ir mažesniosios šaknų skirtumas lygus 4. Raskite c ir abi šaknis.

24. Be šaknų radimo Įrodykite: jei a ir c yra skirtingų ženklų, tai daugianaris $ax^2 + bx + c$ turi dvi skirtingas šaknis (su bet kuriuo b). Ar teisingas atvirkščias teiginys? Pateikite pavyzdį.

25. Ekstremumas ir šaknis Mažiausia daugianario $x^2 + bx + c$ reikšmė lygi -4, o viena jo šaknis – 5. Raskite visus tokius daugianarius ir jų šaknis.

26. Sveikasis skaičius Įrodykite: jei b ir c – sveikieji skaičiai ir daugianaris $x^2 + bx + c$ turi vienintelę šaknį, tai ta šaknis – sveikasis skaičius.

27. Viena šaknis Daugianaris $P(x) = ax^2 + bx + c$ turi vienintelę šaknį 4, o $P(0) = 48$. Raskite a, b, c.

28. Gudriai Išspręskite lygtį, pažymėję $t = x^2 - 2x$: $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$.

29. Tekstinis Stačiakampio kraštinės skiriasi 3 cm, o jo įstrižainė lygi 15 cm. Raskite kraštines.

30. Su visais m Įrodykite:

a) su kiekvienu realiuoju m daugianaris $x^2 + mx - 1$ turi dvi skirtingas šaknis;

b) jokiam realiajam m daugianaris $x^2 + mx + m^2 + 1$ neturi šaknų.

Atsakymai

1. a) taip; b) taip; c) ne; d) taip; e) taip; f) ne.

2. a) ± 7. b) ± 5. c) šaknų nėra. d) $\pm\frac{4}{3}$. e) ± 3. f) 0.

3. a) 0; 7. b) 0; -2. c) 0; 4. d) 0; $\frac{1}{4}$.

4. a) T. b) K. c) T. d) K. e) K. f) K.

5. Prarasta šaknis 0. Šaknys: 0 ir 4.

6. Klaida ženkle: turi būti $\frac{6\pm 4}{2}$. Šaknys: 1 ir 5.

7. A–3, B–1, C–2, D–4.

8. a) $D = 9$; 2 ir 5. b) $D = 25$; $\frac{1}{2}$ ir -2. c) $D = 16$; 1 ir $-\frac{1}{3}$. d) $D = 36$; -1 ir 5.

9. a) $D = -3$, nėra. b) $D = 0$, viena. c) $D = 25$, dvi. d) $D = -16$, nėra.

10. a) $b = -7$, $c = 10$. b) $b = 4$, $c = -6$.

11. a) $p = 1$. b) $q = 2$; antroji šaknis $\frac{1}{2}$.

12. a) 1; 7. b) nėra. c) -1; 3. d) $-\frac{3}{2}$.

13. Plotis 3 m, ilgis 8 m (sprendinys -8 netinka, nes plotis turi būti teigiamas).

14. $c = 0$: $D = 16$, dvi, 0 ir 4. $c = 3$: $D = 4$, dvi, 1 ir 3. $c = 4$: $D = 0$, viena, 2. $c = 5$: $D = -4$, nėra.

15. a) 0; 4. b) 1; -3. c) nėra. d) -3.

16. a) $x_\mathrm{e} = 3$, $P_\mathrm{min} = 3$, šaknų nėra. b) $x_\mathrm{e} = 1$, $P_\mathrm{max} = -3$, šaknų nėra. c) $x_\mathrm{e} = 2$, $P_\mathrm{min} = 0$, viena šaknis 2.

17. a) $x_\mathrm{e} = 4$, $b = -8$, $c = 7$. b) $c = 5$; antroji šaknis 5.

18. Pvz. a) $x^2 - 9$, $D = 36$. b) $x^2 - 10x + 25$, $D = 0$. c) $x^2 + 1$, $D = -4$.

19. a) ± 1; ± 2. b) $x = \pm\sqrt{2}$.

20. $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = x_\mathrm{e}$; pavyzdyje $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_\mathrm{e} = 2$.

21. $m = 6$: šaknis -3; $m = -2$: šaknis 1.

22. $a = 2$, $b = -12$, $c = -14$.

23. $c = 10$; šaknys 1 ir 5.

24. Įrodymas – žr. sprendimus. Atvirkščias teiginys neteisingas, pvz. $x^2 - 5x + 6$.

25. $x^2 - 6x + 5$ (šaknys 1; 5) ir $x^2 - 14x + 45$ (šaknys 5; 9).

26. Įrodymas – žr. sprendimus.

27. $a = 3$, $b = -24$, $c = 48$.

28. $x = -1$; 1; 3.

29. 9 cm ir 12 cm.

30. Įrodymas – žr. sprendimus.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Kad šaknis būtų viena, reikia $D = 0$. Išreiškę D per m, gausite lygtį su m – spręskite ją išskirdami pilnąjį kvadratą.

22. Šaknys -1 ir 7 simetriškos x_e atžvilgiu: kam lygus x_e? Tada užrašykite $P(x) = a(x - x_\mathrm{e})^2 + k$ ir pasinaudokite lygybėmis $P(-1) = 0$ bei $P(0) = -14$.

23. Šaknys – $x_\mathrm{e} - s$ ir $x_\mathrm{e} + s$. Kam tada lygus s? Iš lygties $P(x) = 0$ išreikškite $(x - 3)^2$.

24. Kaip $-4ac$ ženklas susijęs su skirtingais a ir c ženklais? Prisiminkite, kad $b^2 \geq 0$. Atvirkščiam teiginiui ieškokite pavyzdžio su dviem šaknimis ir vienodų ženklų a, c.

25. Daugianarį galima užrašyti pavidalu $(x - h)^2 + k$ (kodėl $a = 1$ ir kam lygus k?). Įrašykite $x = 5$ ir išspręskite lygtį su h.

26. Vienintelė šaknis reiškia, kad $D = 0$, t. y. $b^2 = 4c$. Ar nelyginio skaičiaus kvadratas gali būti lyginis?

27. Jei šaknis vienintelė, tai $D = 0$, o šaknis $x = -\frac{b}{2a}$. Kaip tada atrodo $P(x)$, užrašytas pilnojo kvadrato pavidalu?

28. Kai $t = x^2 - 2x$, lygtis tampa kvadratine kintamojo t atžvilgiu. Radę t, grįžkite prie x.

29. Pažymėkite mažesniąją kraštinę x. Kokia kita kraštinė? Pritaikykite Pitagoro teoremą.

30. Apskaičiuokite D kiekvienu atveju. Koks m^2 ženklas? Kuriuo atveju D visada teigiamas, o kuriuo – visada neigiamas?

Sprendimai (21–30)

21. Šaknis vienintelė, kai $D = 0$. Čia $a = 1$, $b = m$, $c = m + 3$:

$$D = m^2 - 4(m + 3) = m^2 - 4m - 12 = 0.$$

Išskiriame pilnąjį kvadratą: $(m-2)^2 - 4 - 12 = 0$, $(m-2)^2 = 16$, $m - 2 = \pm 4$, todėl $m = 6$ arba $m = -2$. Šaknis $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2}$: $m = 6$: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, šaknis -3; $m = -2$: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, šaknis 1.
Atsakymas: $m = 6$, šaknis -3; $m = -2$, šaknis 1. Patikra: $9 - 18 + 9 = 0$ ✓, $1 - 2 + 1 = 0$ ✓

22. Šaknys -1 ir 7 simetriškos x_e atžvilgiu (5 tema), todėl $x_\text{e} = \frac{-1+7}{2} = 3$. Taigi $P(x) = a(x-3)^2 + k$. Iš sąlygų:

$$P(-1) = 16a + k = 0, \qquad P(0) = 9a + k = -14.$$

Atėmę lygybes: $7a = 14$, $a = 2$; tada $k = -32$. Atskliaudžiame:

$$P(x) = 2(x-3)^2 - 32 = 2x^2 - 12x + 18 - 32 = 2x^2 - 12x - 14.$$

Atsakymas: $a = 2$, $b = -12$, $c = -14$. Patikra: $P(7) = 98 - 84 - 14 = 0$ ✓, $P(-1) = 2 + 12 - 14 = 0$ ✓

23. Čia $a = 2$, $b = -12$, todėl $x_\text{e} = -\frac{-12}{4} = 3$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $2x^2 - 12x + c = 2(x-3)^2 - 18 + c$. Lygtis $P(x) = 0$: $2(x-3)^2 = 18 - c$, $(x-3)^2 = 9 - \frac{c}{2}$. Pažymėkime $s^2 = 9 - \frac{c}{2}$, kur $s > 0$ (šaknys dvi). Tada $x = 3 \pm s$, o jų skirtumas lygus $2s = 4$, todėl $s = 2$. Tuomet $9 - \frac{c}{2} = 4$, $c = 10$. Šaknys: 3 ± 2, t. y. 1 ir 5.
Atsakymas: $c = 10$; šaknys 1 ir 5. Patikra: $D = 144 - 80 = 64$, $x = \frac{12 \pm 8}{4} - 5$ ir 1 ✓

24. Kadangi a ir c yra skirtingų ženklų, sandauga ac neigiama, todėl $-4ac > 0$. Tada $D = b^2 - 4ac$ yra neneigiamo skaičiaus b^2 ir teigiamo skaičiaus suma, todėl $D > 0$. Kai $D > 0$, daugianaris turi dvi skirtingas šaknis.
Atvirkščias teiginys: jei šaknys dvi, tai a ir c būtinai skirtingų ženklų – **neteisinga**. Pavyzdys: $x^2 - 5x + 6$ ($a = 1$, $c = 6$ vienodų ženklų): $D = 25 - 24 = 1 > 0$, šaknys 2 ir 3.

25. Kadangi vyriausiasis koeficientas lygus 1, o mažiausia reikšmė lygi -4, tai $P(x) = (x-h)^2 - 4$ (3 tema). Šaknis 5: $(5-h)^2 - 4 = 0$, $(5-h)^2 = 4$, $5 - h = \pm 2$, todėl $h = 3$ arba $h = 7$.

- $h = 3$: $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5$. Šaknys: $(x-3)^2 = 4$, $x = 1$ arba $x = 5$.
- $h = 7$: $(x-7)^2 - 4 = x^2 - 14x + 45$. Šaknys: $(x-7)^2 = 4$, $x = 5$ arba $x = 9$.

Atsakymas: $x^2 - 6x + 5$ (šaknys 1; 5) ir $x^2 - 14x + 45$ (šaknys 5; 9). Patikra: $25 - 30 + 5 = 0$ ✓, $25 - 70 + 45 = 0$ ✓

26. Šaknis vienintelė, kai $D = 0$: $b^2 - 4c = 0$, $b^2 = 4c$. Todėl b^2 lyginis (dalijasi iš 4). Jei b būtų nelyginis, tai ir b^2 būtų nelyginis (nelyginių sandauga nelyginė) – prieštara. Vadinasi, b lyginis: $b = 2k$, kur k – sveikasis skaičius. Vienintelė šaknis $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2k}{2} = -k$ – sveikasis skaičius. (Be to, $c = \frac{b^2}{4} = k^2$.)
Pavyzdys: $b = -6$, $c = 9$: $x^2 - 6x + 9$, šaknis 3 ✓

27. Kadangi šaknis vienintelė, $D = 0$, todėl $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ir šaknis yra $-\frac{b}{2a} = 4$. Todėl $P(x) = a(x-4)^2$. Iš $P(0) = 48$: $a \cdot 16 = 48$, $a = 3$. Atskliaudžiame: $3(x-4)^2 = 3(x^2 - 8x + 16) = 3x^2 - 24x + 48$.
Atsakymas: $a = 3$, $b = -24$, $c = 48$. Patikra: $D = 576 - 576 = 0$ ✓, $P(4) = 48 - 96 + 48 = 0$ ✓

28. Pažymėję $t = x^2 - 2x$, gauname $t^2 - 2t - 3 = 0$. $D = 4 + 12 = 16$, $t = \frac{2 \pm 4}{2}$: $t = 3$ arba $t = -1$.

- $x^2 - 2x = 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $D = 16$, $x = \frac{2 \pm 4}{2}$: $x = 3$ arba $x = -1$.
- $x^2 - 2x = -1$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$: $x = 1$.

Atsakymas: $x = -1$; 1; 3. Patikra: $x = 1$: $t = -1$, $1 + 2 - 3 = 0$ ✓; $x = 3$: $t = 3$, $9 - 6 - 3 = 0$ ✓

29. Tarkime, mažesnioji kraštinė lygi x cm, tada didesnioji – $(x+3)$ cm. Pagal Pitagoro teoremą: $x^2 + (x+3)^2 = 15^2$, $2x^2 + 6x + 9 = 225$, $2x^2 + 6x - 216 = 0$, $x^2 + 3x - 108 = 0$. $D = 9 + 432 = 441 = 21^2$, $x = \frac{-3 \pm 21}{2}$: $x = 9$ arba $x = -12$. Kraštinės ilgis teigiamas, todėl $x = 9$.
Atsakymas: 9 cm ir 12 cm. Patikra: $81 + 144 = 225 = 15^2$ ✓

30. a) $D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = m^2 + 4$. Kadangi $m^2 \geq 0$ (3 tema), tai $D \geq 4 > 0$ su kiekvienu m. Todėl visada yra dvi skirtingos šaknys.
b) $D = m^2 - 4(m^2 + 1) = -3m^2 - 4$. Kadangi $m^2 \geq 0$, tai $-3m^2 \leq 0$ ir $D \leq -4 < 0$ su kiekvienu m. Todėl realiųjų šaknų niekada nėra.
Patikra: $m = 0$: a) $x^2 - 1$, šaknys ± 1 ✓; b) $x^2 + 1$, šaknų nėra ✓

Kvadratinis daugianaris

7 tema: Vijeto teorema (šaknų suma ir sandauga)

1. Ką rodo pavyzdžiai

daugianaris	šaknys	suma	sandauga
$x^2 - 5x + 6$	$2;\ 3$	$5 = -(-5)$	$6 = 6$
$2x^2 - 10x + 12$	$2;\ 3$	$5 = \frac{10}{2}$	$6 = \frac{12}{2}$
$x^2 + 5x + 6$	$-2;\ -3$	-5	6

Kai $a = 1$: suma $= -b$, sandauga $= c$.

Kai $a \neq 1$: suma $= -\dfrac{b}{a}$, sandauga $= \dfrac{c}{a}$.

Spėjimas: šaknų suma ir sandauga priklauso tik nuo koeficientų – šaknų skaičiuoti nereikia!

2. Teorema ir įrodymas

Jei $P(x) = ax^2 + bx + c$ ir $D \geq 0$, tai jo šaknims x_1, x_2:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Įrodymas (6 tema: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$):

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

sandaugoje: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

Kai $D = 0$: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (dviguboji šaknis).

Vijeto teorema

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad (D \geq 0)$$

3. Taikymas: šaknų neskaičiuojant

$P(x) = 2x^2 - 7x + 3$: $D = 49 - 24 = 25 \geq 0$ ✓

$$x_1 + x_2 = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}, \qquad x_1 x_2 = \frac{3}{2}$$

Kita šaknis, kai viena žinoma ($x_1 = 3$, nes $P(3) = 0$):

$$x_2 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \qquad \text{arba} \qquad x_2 = \frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}$$

Patikra: $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0$ ✓

Šaknų ženklai (dvi skirtingos šaknys):

$x_1 x_2 < 0$:	priešingų ženklų	$2x^2 + x - 3$
$x_1 x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$:	abi teigiamos	$x^2 - 5x + 6$
$x_1 x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$:	abi neigiamos	$x^2 + 5x + 6$

4. Simetriniai reiškiniai

Reiškiniai, kurie **nesikeičia** sukeitus x_1 ir x_2, išreiškiami per $x_1 + x_2$ ir $x_1 x_2$, o juos randame pagal Vijeto teoremą:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \qquad (x_1 x_2 \neq 0)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

Kodėl: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$ – atimame $2x_1 x_2$.

Pvz. $2x^2 - 7x + 3$: $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{37}{4}, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7/2}{3/2} = \frac{7}{3}$$

Patikra su 3 ir $\frac{1}{2}$: $9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$, $\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ ✓

5. Dažnos klaidos ir ryšiai

Pirma patikrinkite $D \geq 0$!

$x^2 + 2x + 5$: $D = 4 - 20 = -16 < 0$ – realiųjų šaknų **nėra**, todėl išvada „suma -2, sandauga 5“ – ✗ klaidinga.

Ženklai: suma $= -\dfrac{b}{a}$, sandauga $= \dfrac{c}{a}$ (be minuso).

Ryšys su 3–5 temomis:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = x_e$$

Ekstremumo taškas – **per vidurį tarp šaknų** (5 tema: $P(x_1) = P(x_2) = 0$).

Pvz. $x^2 - 5x + 6$: šaknys 2 ir 3, $x_e = \frac{5}{2}$.

Kvadratinis daugianaris

7 tema: Vijeto teorema – 30 užduočių

Jei $D = b^2 - 4ac \geq 0$, tai daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknims x_1, x_2: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ (kai $D = 0$: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$). Kai $D < 0$, realiųjų šaknų nėra – teoremos netaikome.
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$, $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$. Ryšys su ekstremumo tašku: $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_e$.

1. Atpažink Kuriems daugianariams galima taikyti Vijeto teoremą? Pirmiausia patikrinkite D, tada nurodykite $x_1 + x_2$ ir x_1x_2.

a) $x^2 - 7x + 10$ **b)** $x^2 + x + 3$ **c)** $2x^2 - 4x + 2$ **d)** $-x^2 + 3x + 4$

2. Apskaičiuok Visų daugianarių $D > 0$. Nerasdami šaknų, apskaičiuokite $x_1 + x_2$ ir x_1x_2.

a) $3x^2 - 12x + 5$ **b)** $-2x^2 + 7x - 3$ **c)** $x^2 - 9$ **d)** $5x^2 + 10x$

3. Lentelė Užpildykite lentelę: šaknis raskite pagal šaknų formulę ir įsitikinkite, kad jų suma ir sandauga sutampa su $-\frac{b}{a}$ ir $\frac{c}{a}$.

daugianaris	D	šaknys	$x_1 + x_2$	x_1x_2	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$x^2 - 8x + 15$						
$2x^2 + 3x - 2$						
$4x^2 - 12x + 9$						

4. Rask klaidą Raskite mokinių klaidas ir parašykite teisingai.

a) $x^2 - 6x + 8$: $D = 36 - 32 = 4 \geq 0$, todėl $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = -6$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 8$.
b) $2x^2 + 5x - 3$: $D = 49 \geq 0$, todėl $x_1 + x_2 = -5$, $x_1x_2 = -3$.

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Daugianario $x^2 + 4x + 5$ šaknų suma lygi -4.
b) Daugianario $2x^2 - 6x + 1$ šaknų suma lygi 3.
c) Jei $c = 0$, tai viena iš daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknų lygi 0.
d) Jei a ir c skirtingų ženklų, tai šaknys egzistuoja ir jų sandauga neigiama.
e) Kai $D = 0$, Vijeto teorema netaikoma, nes šaknis viena.

6. Kita šaknis Įsitikinkite, kad nurodytas skaičius yra šaknis, ir pagal Vijeto teoremą raskite kitą šaknį.

a) $x^2 - 9x + 14$, $x_1 = 2$
b) $2x^2 - 9x + 4$, $x_1 = 4$
c) $3x^2 + x - 2$, $x_1 = -1$
d) $x^2 - 10x + 25$, $x_1 = 5$

7. Simetriniai reiškiniai Daugianario $x^2 - 5x + 3$ šaknys – x_1 ir x_2 (patikrinkite, kad $D > 0$). Nerasdami šaknų, apskaičiuokite:

a) $x_1^2 + x_2^2$ **b)** $(x_1 - x_2)^2$ **c)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ **d)** $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

8. Šaknų ženklai Patikrinkite, kad šaknys realiosios ir skirtingos, ir, jų nerasdami, nustatykite ženklus. Jei ženklai skirtingi – kurios šaknies modulis didesnis?

a) $x^2 - 7x + 10$ **b)** $x^2 + 6x + 8$ **c)** $2x^2 + x - 6$ **d)** $3x^2 - x - 4$

9. Sugretink Kiekvienam daugianariui (visų $D > 0$) parinkite jo šaknų sumą ir sandaugą.

A) $x^2 - 6x + 5$ 1) $x_1 + x_2 = -6;\ x_1x_2 = 5$

B) $5x^2 + 6x + 1$ 2) $x_1 + x_2 = \frac{6}{5};\ x_1x_2 = -\frac{1}{5}$

C) $x^2 + 6x + 5$ 3) $x_1 + x_2 = 6;\ x_1x_2 = 5$

D) $5x^2 - 6x - 1$ 4) $x_1 + x_2 = -\frac{6}{5};\ x_1x_2 = \frac{1}{5}$

10. Parametras Viena daugianario šaknis lygi 2. Įrašę šaknį, raskite parametrą, o tada pagal Vijeto teoremą – kitą šaknį.

a) $x^2 + px + 6$ **b)** $3x^2 - 5x + k$

11. Parametras Raskite parametrą m ir patikrinkite, ar su juo šaknys realiosios.

a) Daugianario $x^2 + (m - 3)x + 4$ šaknų suma lygi 5.
b) Daugianario $mx^2 - 6x + 2$ šaknų sandauga lygi $\frac{1}{2}$.
c) Daugianario $2x^2 + mx - 8$ šaknų suma lygi 3.

12. Vidurys Daugianaris turi realiąsias šaknis. Nenaudodami formulės $x_e = -\frac{b}{2a}$, raskite trūkstamą dydį.

a) Šaknys -3 ir 9. Raskite x_e.
b) Šaknys 4 ir 7. Raskite x_e.
c) $x_e = 5$, viena šaknis 1. Raskite kitą šaknį.
d) $x_e = -2$, viena šaknis 0. Raskite kitą šaknį.

13. Su 1 tema Kvadratinio daugianario $P(x) = 2x^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = 6$ ir $P(1) = 0$. Raskite b ir c. Tada, nerasdami šaknų, apskaičiuokite $x_1 + x_2$ bei x_1x_2 ir pagal Vijeto teoremą raskite kitą šaknį (viena šaknis lygi 1).

14. Su 2 tema Atskliauskite ir, patikrinę D, raskite šaknų sumą ir sandaugą.

a) $(x - 3)^2 - 4$ **b)** $2(x + 1)^2 - 8$ **c)** $-(x - 2)^2 + 9$

15. Su 3 ir 4 temomis Daugianario $P(x) = 2x^2 - 8x + c$ ekstremumas $P_e = -6$. Raskite c, patikrinkite D ir apskaičiuokite $x_1 + x_2$ bei x_1x_2. Palyginkite $\frac{x_1+x_2}{2}$ su ekstremumo tašku x_e.

16. Ar egzistuoja? Ar egzistuoja c, su kuriuo daugianario $x^2 - 6x + c$ šaknų sandauga lygi:

a) 10 **b)** 8 **c)** 9

Jei taip – nurodykite šaknis.

17. Su 5 tema Kvadratinio daugianario $P(x) = 2x^2 + bx + c$ reikšmės tenkina $P(1) = P(5)$ ir $P(0) = 10$. Raskite b ir c, patikrinkite D ir, nerasdami šaknų, apskaičiuokite $x_1 + x_2$ ir x_1x_2.

18. Sugalvok pats Sugalvokite du skirtingus daugianarius, kurių šaknų suma lygi 5, o sandauga – 6. Apskaičiuokite jų D ir įsitikinkite, kad šaknys tikrai realiosios.

19. Be šaknų Daugianario $x^2 - 6x + 4$ šaknys – x_1 ir x_2. Nerasdami jų, apskaičiuokite:

a) $x_1^2 + x_2^2$ **b)** $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ **c)** $x_1^3 + x_2^3$ **d)** $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

20. Iššūkis Įrodykite: jei $D \geq 0$, tai $(x_1 - x_2)^2 = \dfrac{D}{a^2}$. Pritaikykite daugianariui $2x^2 - 7x + 3$ ir patikrinkite, radę šaknis pagal formulę.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Iššūkis Duotas daugianaris $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

a) Įrodykite: jei $a + b + c = 0$, tai $D \geq 0$, o šaknys yra 1 ir $\frac{c}{a}$.

b) Įrodykite: jei $a - b + c = 0$, tai -1 yra šaknis, o kita šaknis lygi $-\frac{c}{a}$.

c) Nenaudodami šaknų formulės, raskite visas daugianarių $13x^2 - 8x - 5$ ir $5x^2 + 12x + 7$ šaknis.

22. Parametras Daugianario $x^2 - mx + m + 6$ realiųjų šaknų kvadratų suma lygi 12. Raskite m. Nepamirškite patikrinti, ar su rastomis m reikšmėmis šaknys tikrai yra.

23. Simetrija ir skirtumas Daugianario $P(x) = x^2 + bx + c$ reikšmės tenkina $P(1) = P(9)$, o dvi jo realiosios šaknys skiriasi 6 vienetais (t. y. $|x_1 - x_2| = 6$). Raskite $P(x)$ ir jo šaknis.

24. Priešingos šaknys Su kuriomis m reikšmėmis daugianario $x^2 + (m^2 - 9)x + m - 1$ šaknys realiosios ir viena kitai priešingos (t. y. $x_2 = -x_1$)? Kokios tada šaknys?

25. Iš sąlygų Kvadratinio daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ realiųjų šaknų suma lygi 4, jų kvadratų suma – 10, o $P(0) = -3$. Raskite $P(x)$ ir patikrinkite visas sąlygas.

26. Gudriai Daugianario $x^2 - 4x + 1$ šaknys – x_1 ir x_2. Nerasdami šaknų, apskaičiuokite:

a) $x_1^4 + x_2^4$;

b) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ (pirmiausia pagrįskite, kad šaknys teigiamos).

27. Įrodykite ir pritaikykite

a) Įrodykite: jei daugianario $ax^2 + bx + c$ šaknys realiosios ir viena šaknis lygi kitai, padaugintai iš 2, tai $2b^2 = 9ac$.

b) Su kuriomis b reikšmėmis daugianario $x^2 + bx + 8$ viena šaknis lygi kitai, padaugintai iš 2? Kokios tada šaknys?

28. Su 2 tema Daugianaris užrašytas pavidalu $P(x) = a(x - h)^2 + k$ ir turi realiąsias šaknis. Įrodykite, kad $x_1 + x_2 = 2h$ ir $x_1 x_2 = h^2 + \frac{k}{a}$. Remdamiesi tuo, nenaudodami šaknų formulės, raskite abiejų daugianarių šaknis:

a) $3(x - 2)^2 - 12$ **b)** $-2(x + 1)^2 + 8$

29. Dvi galimybės Daugianario $x^2 + bx + 12$ realiųjų šaknų kvadratų suma lygi 25. Raskite b, užrašykite abu daugianarius ir jų šaknis.

30. Mažiausia reikšmė Duotas daugianaris $x^2 - (m - 2)x - m$.

a) Įrodykite, kad su kiekvienu m šaknys realiosios.

b) Išreikškite šaknų kvadratų sumą $x_1^2 + x_2^2$ per m ir raskite, su kuriuo m ji mažiausia. Kokia jos mažiausia reikšmė?

Atsakymai

1. a) $D = 9$; 7; 10. b) $D = -11 < 0$: ne. c) $D = 0$; 2; 1. d) $D = 25$; 3; -4.

2. a) 4; $\frac{5}{3}$. b) $\frac{7}{2}$; $\frac{3}{2}$. c) 0; -9. d) -2; 0.

3. I: $D = 4$; 3 ir 5; 8; 15; 8; 15. II: $D = 25$; $\frac{1}{2}$ ir -2; $-\frac{3}{2}$; -1; $-\frac{3}{2}$; -1. III: $D = 0$; $\frac{3}{2}$; 3; $\frac{9}{4}$; 3; $\frac{9}{4}$.

4. a) $x_1 + x_2 = 6$; $x_1x_2 = 8$. b) $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$; $x_1x_2 = -\frac{3}{2}$.

5. a) K. b) T. c) T. d) T. e) K.

6. a) 7. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{2}{3}$. d) 5 (dviguboji šaknis).

7. a) 19. b) 13. c) $\frac{5}{3}$. d) 9.

8. a) abi teigiamos. b) abi neigiamos. c) skirtingų ženklų, didesnio modulio – neigiama. d) skirtingų ženklų, didesnio modulio – teigiama.

9. A–3, B–4, C–1, D–2.

10. a) $p = -5$; kita šaknis 3. b) $k = -2$; kita šaknis $-\frac{1}{3}$.

11. a) $m = -2$. b) $m = 4$. c) $m = -6$.

12. a) 3. b) $\frac{11}{2}$. c) 9. d) -4.

13. $b = -8$, $c = 6$; $x_1 + x_2 = 4$; $x_1x_2 = 3$; kita šaknis 3.

14. a) 6; 5. b) -2; -3. c) 4; -5.

15. $c = 2$; $D = 48 > 0$; $x_1 + x_2 = 4$; $x_1x_2 = 1$; $\frac{x_1+x_2}{2} = 2 = x_e$.

16. a) Ne ($D = -4 < 0$). b) Taip, $c = 8$; šaknys 2 ir 4. c) Taip, $c = 9$; šaknis 3 (dviguboji).

17. $b = -12$, $c = 10$; $D = 64 > 0$; $x_1 + x_2 = 6$; $x_1x_2 = 5$.

18. Pvz. $x^2 - 5x + 6$ ($D = 1$) ir $2x^2 - 10x + 12$ ($D = 4$).

19. a) 28. b) 24. c) 144. d) 7.

20. Įrodymas – žr. sprendimus. $|x_1 - x_2| = \frac{5}{2}$.

21. a), b) Įrodymas – žr. sprendimus. c) 1 ir $-\frac{5}{13}$; -1 ir $-\frac{7}{5}$.

22. $m = -4$ ($m = 6$ netinka, nes tada $D < 0$).

23. $P(x) = x^2 - 10x + 16$; šaknys 2 ir 8.

24. $m = -3$; šaknys 2 ir -2 ($m = 3$ netinka).

25. $P(x) = -x^2 + 4x - 3$.

26. a) 194. b) $\sqrt{6}$.

27. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $b = \pm 6$; $b = 6$: šaknys -2 ir -4; $b = -6$: šaknys 2 ir 4.

28. Įrodymas – žr. sprendimus. a) šaknys 0 ir 4. b) šaknys -3 ir 1.

29. $b = -7$: $x^2 - 7x + 12$, šaknys 3 ir 4. $b = 7$: $x^2 + 7x + 12$, šaknys -3 ir -4.

30. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) $m = 1$; mažiausia reikšmė 3.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. a) Įrašykite $x = 1$ ir panaudokite $a + b + c = 0$. Į diskriminanto reiškinį įrašykite $b = -(a + c)$. b) Taip pat, tik su $x = -1$. c) Patikrinkite, kuri iš dviejų sąlygų ($a + b + c$ ar $a - b + c$) tinka.

22. Kvadratų suma: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Gausite lygtį su m – išspręskite ją išskirdami pilnąjį kvadratą. Tada patikrinkite D.

23. Iš $P(1) = P(9)$ raskite x_e, o iš jo – b. Tada $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.

24. Šaknys priešingos, kai $x_1 + x_2 = 0$. Su gauta m reikšme dar turi būti $D \geq 0$.

25. Iš $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ raskite x_1x_2. Tada iš $\frac{c}{a}$ ir $P(0)$ raskite a.

26. a) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$. b) Apskaičiuokite $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$.

27. Pažymėkite šaknis x_1 ir $2x_1$. Užrašykite Vijeto formules ir iš pirmosios išreikškite x_1 per a ir b.

28. Atskliauskite $a(x - h)^2 + k$ ir raskite b bei c per a, h, k.

29. $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. Suma gali būti teigiama arba neigiama. Patikrinkite D.

30. a) Apskaičiuokite $D = b^2 - 4ac$. b) Kvadratų sumą išreikškite parametru m ir išskirkite pilnąjį kvadratą (3 tema).

Sprendimai (21–30)

21. a) Jei $a+b+c=0$, tai $b=-(a+c)$, todėl

$$D=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geq 0,$$

taigi šaknys realiosios. Be to, $P(1)=a+b+c=0$, vadinasi, 1 yra šaknis. Pagal sandaugos formulę $1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, todėl $x_2=\frac{c}{a}$.
b) Jei $a-b+c=0$, tai $P(-1)=a-b+c=0$, taigi -1 yra šaknis (analogiškai $D=(a+c)^2-4ac\geq 0$, nes $b=a+c$). Iš $x_1x_2=\frac{c}{a}$: $-x_2=\frac{c}{a}$, todėl $x_2=-\frac{c}{a}$.
c) $13x^2-8x-5$: $13-8-5=0$, todėl šaknys 1 ir $\frac{-5}{13}$. $5x^2+12x+7$: $5-12+7=0$, todėl šaknys -1 ir $-\frac{7}{5}$.
Patikra (sumos): $1-\frac{5}{13}=\frac{8}{13}=-\frac{-8}{13}$ ✓; $-1-\frac{7}{5}=-\frac{12}{5}$ ✓

22. Pagal Vijeto teoremą (galioja, kai $D\geq 0$ – tai patikrinsime pabaigoje): $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=m+6$. Tada

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2(m+6)=m^2-2m-12.$$

Gauname lygtį $m^2-2m-12=12$, t. y. $m^2-2m-24=0$. Išskiriame pilnąjį kvadratą: $(m-1)^2=25$, taigi $m=6$ arba $m=-4$.
Tikriname $D=m^2-4(m+6)=m^2-4m-24$:

- $m=6$: $D=36-24-24=-12<0$ – šaknų nėra, netinka;
- $m=-4$: $D=16+16-24=8>0$ ✓

Atsakymas: $m=-4$. Patikra: x^2+4x+2, $x_1+x_2=-4$, $x_1x_2=2$, kvadratų suma $16-4=12$ ✓

23. Iš $P(1)=P(9)$ pagal simetriją (5 tema) $x_e=\frac{1+9}{2}=5$. Kadangi $a=1$, tai $x_e=-\frac{b}{2}$, todėl $b=-10$. Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=10$, $x_1x_2=c$. Tada

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=100-4c=6^2=36\ \Rightarrow\ c=16.$$

Daugianaris $x^2-10x+16$: $D=100-64=36>0$ ✓, šaknys $\frac{10\pm 6}{2}$, t. y. 2 ir 8.
Atsakymas: $P(x)=x^2-10x+16$, šaknys 2 ir 8. Patikra: $P(1)=7=P(9)$ ✓, $8-2=6$ ✓

24. Šaknys priešingos tada ir tik tada, kai $x_1+x_2=0$ (ir $D\geq 0$). Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=-(m^2-9)=0$, taigi $m^2=9$, $m=3$ arba $m=-3$. Dabar tikriname $D=(m^2-9)^2-4(m-1)=-4(m-1)$:

- $m=3$: $D=-8<0$ – šaknų nėra, netinka;
- $m=-3$: $D=16>0$ ✓

Kai $m=-3$, gauname daugianarį x^2-4; jo šaknys 2 ir -2.
Atsakymas: $m=-3$; šaknys 2 ir -2. Patikra: $2+(-2)=0$ ✓

25. Žinome, kad $x_1+x_2=4$ ir $x_1^2+x_2^2=10$. Iš $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$: $16=10+2x_1x_2$, todėl $x_1x_2=3$. Pagal Vijeto teoremą

$$-\frac{b}{a}=4,\qquad \frac{c}{a}=3.$$

Be to, $P(0)=c=-3$, todėl $a=\frac{c}{3}=-1$, o $b=-4a=4$. Taigi $P(x)=-x^2+4x-3$.
Patikra: $D=16-12=4>0$; $x_1+x_2=-\frac{4}{-1}=4$ ✓, $x_1x_2=\frac{-3}{-1}=3$ ✓, šaknys 1 ir 3, kvadratų suma $1+9=10$ ✓
Atsakymas: $P(x)=-x^2+4x-3$.

26. Pirmiausia $D=16-4=12>0$, todėl galima taikyti Vijeto teoremą: $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=1$.
a) $x_1^2+x_2^2=4^2-2\cdot 1=14$. Tada

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=14^2-2\cdot 1=194.$$

b) Sandauga $1>0$, todėl šaknys vienodo ženklo; suma $4>0$, todėl abi teigiamos ir reiškiniai $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ apibrėžti. Tada

$$(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=4+2\cdot 1=6.$$

Kadangi $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$, tai $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{6}$.
Atsakymas: a) 194; b) $\sqrt{6}$. Patikra: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}\approx 3{,}732;\ 0{,}268$, $1{,}932+0{,}518\approx 2{,}449\approx\sqrt{6}$ ✓

27. a) Pažymėkime šaknis x_1 ir $2x_1$. Pagal Vijeto teoremą

$$x_1 + 2x_1 = 3x_1 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot 2x_1 = 2x_1^2 = \frac{c}{a}.$$

Iš pirmosios $x_1 = -\frac{b}{3a}$. Įrašome į antrąją: $2 \cdot \frac{b^2}{9a^2} = \frac{c}{a}$, padauginame iš $9a^2$ ir gauname $2b^2 = 9ac$.
b) Čia $a = 1$, $c = 8$: $2b^2 = 72$, $b^2 = 36$, $b = \pm 6$. Tikriname $D = 36 - 32 = 4 > 0$ ✓ $b = 6$: šaknų suma -6, šaknys -2 ir -4 ($-4 = 2 \cdot (-2)$). $b = -6$: šaknys 2 ir 4.
Atsakymas: $b = \pm 6$.

28. Atskliauskime: $P(x) = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$, todėl $b = -2ah$, $c = ah^2 + k$. Pagal Vijeto teoremą

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2h, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = h^2 + \frac{k}{a}.$$

(Taigi $\frac{x_1+x_2}{2} = h = x_e$ – vėl matome ryšį su ekstremumo tašku.)
a) $a = 3$, $h = 2$, $k = -12$: $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 4 - 4 = 0$. Sandauga 0 – viena šaknis 0, kita 4.
b) $a = -2$, $h = -1$, $k = 8$: $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 x_2 = 1 - 4 = -3$. Šaknys 1 ir -3 (suma -2, sandauga -3).
Patikra: $P(1) = -2 \cdot 4 + 8 = 0$ ✓, $P(-3) = -2 \cdot 4 + 8 = 0$ ✓.
Atsakymas: a) 0 ir 4; b) -3 ir 1.

29. Pagal Vijeto teoremą $x_1 x_2 = 12$. Tada

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 25 + 24 = 49,$$

taigi $x_1 + x_2 = 7$ arba $x_1 + x_2 = -7$. Kadangi $x_1 + x_2 = -b$, tai $b = -7$ arba $b = 7$.
Tikriname $D = b^2 - 48 = 49 - 48 = 1 > 0$ abiem atvejais ✓
$b = -7$: $x^2 - 7x + 12$, šaknys $\frac{7 \pm 1}{2}$, t. y. 3 ir 4. $b = 7$: $x^2 + 7x + 12$, šaknys -3 ir -4.
Patikra: $9 + 16 = 25$ ✓abiem atvejais.
Atsakymas: $b = \pm 7$.

30. a) Su visais m: $x_1 x_2 = -m$, $x_1 + x_2 = m - 2$. Tada

$$D = (m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = m^2 - 4m + 4 + 4m = m^2 + 4.$$

Kadangi $m^2 \geq 0$, tai $D = m^2 + 4 \geq 4 > 0$ su kiekvienu m, taigi daugianaris visada turi dvi skirtingas realiąsias šaknis.
b) $x_1^2 + x_2^2 = (m-2)^2 - 2(-m) = m^2 - 4m + 4 + 2m = m^2 - 2m + 4$. Išskiriame pilnąjį kvadratą:

$$x_1^2 + x_2^2 = (m-1)^2 + 3.$$

Kadangi $(m-1)^2 \geq 0$, tai $x_1^2 + x_2^2 \geq 3$, o lygybė pasiekiama, kai $m = 1$.
Atsakymas: mažiausia reikšmė 3, kai $m = 1$. Patikra: $m = 1$: $x^2 + x - 1$, $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -1$, kvadratų suma $1 + 2 = 3$ ✓

Kvadratinis daugianaris

8 tema: atvirkštinė Vijeto teorema

1. Atvirkštinė Vijeto teorema

Skaičiai u ir v yra daugianario $\boxed{x^2-(u+v)x+uv}$ šaknys.

Kodėl? Atskliaudę gauname būtent šį daugianarį:

$$(x-u)(x-v)=x^2-(u+v)x+uv$$

Sandauga lygi 0, kai $x=u$ arba $x=v$.

Pavyzdys: skaičiai 3 ir 4

$$3+4=\mathbf{7},\quad 3\cdot 4=\mathbf{12}\quad\longrightarrow\quad x^2-\mathbf{7}x+\mathbf{12}$$

Patikra: $9-21+12=0$, $16-28+12=0$ ✓

2. Sudarome daugianarį iš šaknų

Šaknys u, v $\Rightarrow$ $\boxed{x^2-(u+v)x+uv}$

Visi daugianariai su šiomis šaknimis: $a(x-u)(x-v)$.

šaknys	suma; sandauga	daugianaris
2 ir 5	7; 10	$x^2-7x+10$
-3 ir 4	1; -12	x^2-x-12
2 ir $\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$; 1	$2x^2-5x+2$ $(\cdot 2)$

Su papildoma sąlyga: šaknys -2 ir 5, $P(0)=20$:

$P(x)=a(x+2)(x-5)$,

$P(0)=-10a=20\ \Rightarrow\ a=-2$,

$\boxed{P(x)=-2x^2+6x+20}$

Vien šaknų neužtenka: a randame iš papildomos sąlygos.

Šaknys $\rightleftarrows$ daugianaris

u, v – šaknys $\iff$ $x^2-(u+v)x+uv=(x-u)(x-v)$

3. Sistema „suma ir sandauga“

$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$$

Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą x ir y – lygties

$$t^2-\mathbf{7}t+\mathbf{10}=0$$

sprendiniai (suma → koeficientas prie t su minusu, sandauga → laisvasis narys).

$D=49-40=9$, $\quad t=\frac{7\pm 3}{2}$: $t_1=2$, $t_2=5$.

Sistemos sprendiniai: $\boxed{(2;5)}$ ir $\boxed{(5;2)}$

Patikra: $2+5=7$, $2\cdot 5=10$ ✓

4. Tokių skaičių gali ir nebūti

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=5 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad t^2-2t+5=0$$

$D=4-20=-16<0\ \Rightarrow$ realiųjų sprendinių **nėra**, todėl ir **sistema sprendinių neturi**: nėra dviejų realiųjų skaičių, kurių suma 2, o sandauga 5.

Kitaip: $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4-20<0$ – neįmanoma.

$D>0$	dvi poros $(t_1;t_2)$ ir $(t_2;t_1)$
$D=0$	viena pora $x=y$ $(x+y=6,\ xy=9$: $(3;3))$
$D<0$	sprendinių **nėra**

5. Taikymas

Sistema su neigiamais skaičiais:

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-8 \end{cases}\ \Rightarrow\ t^2+2t-8=0$$

$D=36$, $t_1=2$, $t_2=-4\ \Rightarrow\ (2;-4)$ ir $(-4;2)$.

Dėmesio: iš $x+y=-2$ gauname $+2t$ (priešingas ženklas).

Šaknys, kai $u+v=6$ ir $u^2+v^2=20$:

$(u+v)^2=u^2+v^2+2uv$: $36=20+2uv\ \Rightarrow\ uv=8$.

Daugianaris: $\boxed{x^2-6x+8}$, šaknys 2 ir 4.

Patikra: $2+4=6$, $4+16=20$ ✓

Kvadratinis daugianaris

8 tema: atvirkštinė Vijeto teorema – 30 užduočių

Jei $u+v=-\frac{b}{a}$ ir $uv=\frac{c}{a}$, tai u ir v yra daugianario ax^2+bx+c šaknys. Daugianaris iš šaknų: $x^2-(u+v)x+uv=(x-u)(x-v)$; visi tokie daugianariai: $a(x-u)(x-v)$.
Sistema $x+y=\ldots$, $xy=\ldots$: x ir y yra lygties $t^2-(\text{suma})\,t+(\text{sandauga})=0$ šaknys; jei $D<0$, sistema sprendinių neturi.

1. Atpažink Ar nurodyti skaičiai yra daugianario šaknys? Patikrinkite jų sumą ir sandaugą.

a) $x^2-9x+14$: 2 ir 7
b) $x^2+3x-10$: 2 ir 5
c) x^2-6x+9: 3 ir 3
d) $2x^2-5x+2$: 2 ir $\frac{1}{2}$
e) $x^2-7x+10$: 3 ir 4

2. Apskaičiuok Sudarykite daugianarį x^2+px+q, kurio šaknys yra duotieji skaičiai.

a) 3 ir 8 **b)** -2 ir 7 **c)** -4 ir -5 **d)** 0 ir 6

3. Lentelė Užpildykite lentelę (visų daugianarių, išskyrus e) eilutę, vyriausiasis koeficientas lygus 1).

	šaknys	suma	sandauga	daugianaris
a)	4 ir 6	□	□	□
b)	-3 ir 5	□	□	□
c)	□	-7	10	□
d)	□	□	□	x^2-x-12
e)	$\frac{1}{2}$ ir 4	□	□	su $a=2$: □

4. Sistema Išspręskite sistemas.

a) $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=12 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-15 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=25 \end{cases}$

5. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Jei $u+v=5$ ir $uv=6$, tai u ir v yra x^2-5x+6 šaknys.
b) Sistema $x+y=3$, $xy=4$ turi sprendinį.
c) Sistema $x+y=6$, $xy=8$ turi vienintelį sprendinį $(2;4)$.
d) Jei skaičių u ir v suma lygi $-\frac{b}{a}$, tai jie yra daugianario ax^2+bx+c šaknys.

6. Rask klaidą Mokinys sprendžia sistemą $x+y=-5$, $xy=6$: „Sudarau $t^2-5t+6=0$, gaunu $t=2$ ir $t=3$, todėl sprendiniai $(2;3)$ ir $(3;2)$.“ Kur klaida? Išspręskite teisingai ir patikrinkite.

7. Rask klaidą ($a\neq 1$) Mokinys ieško daugianario $2x^2-10x+12$ šaknų: „Ieškau skaičių, kurių suma 10, o sandauga 12.“ Kokia iš tikrųjų turi būti suma ir sandauga? Raskite šaknis.

8. Sugretink Kiekvienam daugianariui parinkite jo šaknų porą.

A) x^2-3x-4
B) x^2+3x-4
C) x^2-5x+4
D) x^2+5x+4

1) 1 ir 4
2) -4 ir 1
3) -1 ir -4
4) 4 ir -1

9. Parametras Raskite koeficientus, kai žinomos šaknys:

a) $x^2 + px - 15$ turi šaknis 3 ir -5; p =?
b) $x^2 - 8x + q$ turi šaknis 2 ir 6; q =?
c) $2x^2 + bx + c$ turi šaknis 1 ir 3; b =?, c =?
d) $3x^2 + bx + c$ turi šaknis -2 ir $\frac{1}{3}$; b =?, c =?

10. Rask a Kvadratinio daugianario $P(x)$ šaknys yra -1 ir 4, o $P(0) = 8$. Raskite $P(x)$ standartiniu pavidalu.

11. Rask a (kita sąlyga) Kvadratinio daugianario $P(x)$ šaknys yra 2 ir 5, o $P(1) = -12$. Raskite $P(x)$ ir patikrinkite, kad $P(2) = P(5) = 0$.

12. Su ekstremumu Daugianario $x^2 + px + q$ ekstremumo taškas $x_e = 3$, o viena šaknis lygi 1. Raskite p, q ir kitą šaknį.

13. Šaknys → ekstremumas Daugianario $x^2 + px + q$ šaknys yra -1 ir 7.

a) Sudarykite daugianarį.
b) Raskite ekstremumo tašką x_e ir ekstremumą P_e. Ar tai mažiausia, ar didžiausia reikšmė? Kaip x_e susijęs su šaknimis?
c) Užrašykite daugianarį pilnojo kvadrato pavidalu $(x - h)^2 + k$.

14. Reiškinys su šaknimis Skaičiai x ir y tenkina lygybes $x + y = 7$ ir $x^2 + y^2 = 29$. Raskite xy, tada – visas poras $(x; y)$.

15. Gudriai Išspręskite sistemą $x - y = 2$, $xy = 15$. (Pažymėkite $z = -y$ ir pasinaudokite suma $x + z$.)

16. Tekstinis Stačiakampio perimetras 26 cm, plotas 40 cm^2. Raskite jo kraštines. Ar egzistuoja stačiakampis, kurio perimetras 20 cm, o plotas 30 cm^2?

17. Ar egzistuoja? Ar yra du realieji skaičiai, kurių:

a) suma 6, sandauga 10
b) suma -6, sandauga 9
c) suma 0, sandauga -4
d) suma 0, sandauga 4

Jei yra – raskite juos.

18. Parametras Duota sistema $x + y = k$, $xy = 9$.

a) Kiek sprendinių ji turi, kai $k = 10$? Raskite juos.
b) Kiek sprendinių ji turi, kai $k = 2$?
c) Su kuriomis k reikšmėmis sistema turi tik vieną sprendinį? Raskite jį.

19. Sugalvok pats

a) Sugalvokite sistemą $x + y = \ldots$, $xy = \ldots$, kurios vienas sprendinys yra $(2; 9)$.
b) Sugalvokite tokio pat pavidalo sistemą, kuri sprendinių neturi, ir pagrįskite.

20. Nerasdami šaknų Daugianario $x^2 - 5x + 3$ šaknys – x_1 ir x_2. Nerasdami jų, sudarykite redukuotąją kvadratinę lygtį, kurios šaknys yra:

a) $2x_1$ ir $2x_2$
b) $x_1 + 1$ ir $x_2 + 1$
c) $-x_1$ ir $-x_2$

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Įrodymas Tarkime, kad $a \neq 0$, o realieji skaičiai u, v tenkina $u+v=-\frac{b}{a}$ ir $uv=\frac{c}{a}$. Įrodykite, kad u ir v yra daugianario ax^2+bx+c šaknys (nenaudokite šaknų formulės). Pritaikykite: ar $\frac{2}{3}$ ir -1 yra daugianario $3x^2+x-2$ šaknys?

22. Neatskliausk! Daugianario x^2-6x+4 šaknys – x_1 ir x_2.

a) Įsitikinkite, kad jos realiosios.

b) Nerasdami šaknų, sudarykite redukuotąją kvadratinę lygtį su šaknimis x_1^2 ir x_2^2.

c) Sudarykite kvadratinę lygtį su sveikaisiais koeficientais, kurios šaknys – $\frac{1}{x_1}$ ir $\frac{1}{x_2}$. Kodėl šie skaičiai apibrėžti?

23. Iššūkis Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

(Skaičiai $x+y$ ir xy – kokia jų suma ir sandauga?)

24. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis skaičiai $2m$ ir $m+1$ yra daugianario $x^2-7x+12$ šaknys? Kodėl neužtenka patikrinti tik sandaugos?

25. Dviem būdais Dviejų realiųjų skaičių suma lygi 10. Kokia didžiausia gali būti jų sandauga?

a) Išreikškite sandaugą per x ir raskite kvadratinio daugianario ekstremumą.

b) Kitaip: sistema $x+y=10$, $xy=m$ turi sprendinį tik tada, kai $D \geq 0$. Kokia m reikšmė duoda $D=0$? Kodėl su didesnėmis m reikšmėmis sprendinių nėra?

26. Kubai Raskite visas poras $(x;\,y)$, kai $x+y=6$ ir $x^3+y^3=72$. (Pirmiausia įrodykite, kad $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.)

27. Iš reikšmių į šaknis Kvadratinio daugianario $P(x)=ax^2+bx+c$ reikšmės: $P(0)=12$, $P(1)=4$, $P(-1)=24$.

a) Raskite a, b, c.

b) Nenaudodami šaknų formulės, raskite $P(x)$ šaknis ir patikrinkite.

28. Gudriai Kvadratinio daugianario $P(x)$ reikšmės: $P(2)=P(6)=5$ ir $P(0)=-19$.

a) Raskite $P(x)$. (Kokias šaknis turi $P(x)-5$?)

b) Raskite jo ekstremumo tašką ir ekstremumą. Ar tai mažiausia, ar didžiausia reikšmė?

29. Šaknys = koeficientai Raskite visus daugianarius x^2+px+q, kurių šaknys yra p ir q (šaknys gali sutapti).

30. Iššūkis Nagrinėkite lygtį $(x-a)(x-b)=c^2$; čia a, b, c – bet kurie realieji skaičiai.

a) Užrašykite ją pavidalu $x^2+px+q=0$ ir raskite šaknų sumą bei sandaugą (jei šaknys yra).

b) Įrodykite, kad lygtis visada turi realiųjų šaknų. Kada ji turi tik vieną šaknį?

c) Išspręskite, kai $a=1$, $b=5$, $c=2$.

Atsakymai

1. a) taip; b) ne (suma 7, o turi būti -3); c) taip; d) taip; e) ne (sandauga $12 \neq 10$).

2. a) $x^2 - 11x + 24$. b) $x^2 - 5x - 14$. c) $x^2 + 9x + 20$. d) $x^2 - 6x$.

3. a) 10; 24; $x^2 - 10x + 24$. b) 2; -15; $x^2 - 2x - 15$. c) -2 ir -5; $x^2 + 7x + 10$. d) 4 ir -3; suma 1; sandauga -12. e) $\frac{9}{2}$; 2; $2x^2 - 9x + 4$.

4. a) (4; 5), (5; 4). b) $(-3; -4)$, $(-4; -3)$. c) $(5; -3)$, $(-3; 5)$. d) (5; 5).

5. a) T. b) K ($D < 0$). c) K (yra ir (4; 2)). d) K (reikia ir sandaugos).

6. Reikia $t^2 + 5t + 6 = 0$ (suma -5): $(-2; -3)$ ir $(-3; -2)$.

7. Suma 5, sandauga 6; šaknys 2 ir 3.

8. A–4, B–2, C–1, D–3.

9. a) $p = 2$. b) $q = 12$. c) $b = -8$, $c = 6$. d) $b = 5$, $c = -2$.

10. $P(x) = -2x^2 + 6x + 8$.

11. $P(x) = -3x^2 + 21x - 30$.

12. $p = -6$, $q = 5$; kita šaknis 5.

13. a) $x^2 - 6x - 7$. b) $x_e = 3$, $P_e = -16$ (mažiausia); x_e – šaknų vidurkis. c) $(x - 3)^2 - 16$.

14. $xy = 10$; (2; 5) ir (5; 2).

15. (5; 3) ir $(-3; -5)$.

16. Kraštinės 5 cm ir 8 cm. Antrojo stačiakampio nėra.

17. a) ne. b) taip: -3 ir -3. c) taip: 2 ir -2. d) ne.

18. a) du: (1; 9), (9; 1). b) nė vieno. c) $k = 6$: (3; 3); $k = -6$: $(-3; -3)$.

19. Pvz. a) $x + y = 11$, $xy = 18$. b) pvz. $x + y = 4$, $xy = 5$ ($D = -4 < 0$).

20. a) $x^2 - 10x + 12 = 0$. b) $x^2 - 7x + 9 = 0$. c) $x^2 + 5x + 3 = 0$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus; taip, $\frac{2}{3}$ ir -1 yra šaknys.

22. a) $D = 20$. b) $x^2 - 28x + 16 = 0$. c) $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

23. (2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1).

24. $m = 2$ (šaknys 4 ir 3).

25. Didžiausia sandauga 25 (kai $x = y = 5$).

26. (2; 4) ir (4; 2).

27. a) $P(x) = 2x^2 - 10x + 12$. b) 2 ir 3.

28. a) $P(x) = -2x^2 + 16x - 19$. b) $x_{\max} = 4$, $P_{\max} = 13$.

29. x^2 (šaknys 0 ir 0) ir $x^2 + x - 2$ (šaknys 1 ir -2).

30. a) suma $a + b$, sandauga $ab - c^2$. b) Įrodymas – žr. sprendimus. c) $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Padalykite $ax^2 + bx + c$ iš a ir vietoj $\frac{b}{a}$ bei $\frac{c}{a}$ įrašykite $-(u+v)$ ir uv. Tada atpažinkite sandaugą $(x-u)(x-v)$.

22. Vijeto teorema: $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 x_2 = 4$. Reiškinį $x_1^2 + x_2^2$ išreikškite reiškiniais $(x_1+x_2)^2$ ir x_1x_2; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$.

23. Nagrinėkite du skaičius $x + y$ ir xy: jų suma 11, sandauga 30. Raskite juos pagal atvirkštinę Vijeto teoremą, o tada su kiekviena pora išspręskite sistemą.

24. Atvirkštinei teoremai reikia ir sumos, ir sandaugos. Išnagrinėkite abi sąlygas atskirai ir palyginkite rezultatus.

25. a) $xy = x(10-x)$. b) $D = 100 - 4m$; kada $D = 0$, o kada jis neigiamas?

26. Atskliauskite $(x+y)^3$. Radę xy, kartu su $x + y = 6$ sudarykite lygtį $t^2 - 6t + (\dots) = 0$.

27. Įrašykite $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ į $ax^2 + bx + c$. Tada $P(x)$ padalykite iš a ir ieškokite skaičių su reikiama suma ir sandauga.

28. Daugianario $P(x) - 5$ koeficientai a, b tie patys, o šaknys – 2 ir 6, todėl $P(x) - 5 = a(x-2)(x-6)$. Įrašę $x = 0$, raskite a.

29. Atvirkštinė teorema: $p + q = -p$ ir $pq = q$. Antrąją lygybę perrašykite pavidalu $q(p-1) = 0$.

30. Atskliauskite kairiąją pusę ir perkelkite c^2 į kairę. Diskriminantas $D = (a-b)^2 + 4c^2$ – ką galima pasakyti apie dviejų kvadratų sumą?

Sprendimai (21–30)

21. Iškelkime a prieš skliaustus: $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Pagal sąlygą $\frac{b}{a} = -(u+v)$ ir $\frac{c}{a} = uv$, todėl

$$ax^2+bx+c = a\big(x^2-(u+v)x+uv\big) = a(x-u)(x-v).$$

Įrašę $x=u$ gauname $a\cdot 0\cdot(u-v)=0$, o įrašę $x=v$ – $a(v-u)\cdot 0=0$. Taigi u ir v yra šaknys. Kitų šaknų nėra: sandauga $a(x-u)(x-v)$ lygi 0 tik tada, kai $x=u$ arba $x=v$.
Pritaikymas: $3x^2+x-2$: $\frac{2}{3}+(-1) = -\frac{1}{3} = -\frac{b}{a}$ ✓, $\frac{2}{3}\cdot(-1) = -\frac{2}{3} = \frac{c}{a}$ ✓. Taigi $\frac{2}{3}$ ir -1 yra šaknys. Patikra: $3\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-2 = \frac{4}{3}+\frac{2}{3}-2 = 0$ ✓, $3-1-2=0$ ✓.

22. a) $D = 36-16 = 20$. Diskriminantas teigiamas, todėl daugianaris turi dvi realiąsias šaknis. Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=4$.
b) $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = 36-8=28$; $x_1^2\cdot x_2^2 = (x_1x_2)^2 = 16$. Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą ieškomoji lygtis: $x^2-28x+16=0$.
c) Kadangi $x_1x_2 = 4\neq 0$, nė viena šaknis nelygi 0, todėl $\frac{1}{x_1}$ ir $\frac{1}{x_2}$ apibrėžti. Suma: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; sandauga: $\frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{4}$. Lygtis $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=0$; padauginę iš 4, gauname $4x^2-6x+1=0$.
Patikra: $x_1 = 3+\sqrt{5}$: $x_1^2 = 14+6\sqrt{5}$, o $x_2^2 = 14-6\sqrt{5}$; suma 28, sandauga $196-180=16$ ✓

23. Skaičiai $x+y$ ir xy turi sumą 11 ir sandaugą 30, todėl pagal atvirkštinę teoremą jie yra lygties $t^2-11t+30=0$ šaknys. $D = 121-120 = 1$, $t = \frac{11\pm1}{2}$, t. y. 5 ir 6.

- $x+y=5$, $xy=6$: $t^2-5t+6=0$, $t=2$ arba 3. Poros (2; 3), (3; 2).
- $x+y=6$, $xy=5$: $t^2-6t+5=0$ ($D=16$), $t=1$ arba 5. Poros (1; 5), (5; 1).

Atsakymas: (2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1). Patikra: (1; 5): $1+5+5=11$ ✓, $5\cdot 6=30$ ✓

24. Pagal atvirkštinę teoremą skaičiai yra šaknys, kai suma lygi 7 *ir* sandauga lygi 12.
Suma: $2m+m+1 = 3m+1 = 7$, todėl $m=2$.
Sandauga: $2m(m+1)=12$, todėl $m^2+m-6=0$; $D = 1+24=25$, $m = \frac{-1\pm5}{2}$, t. y. $m=2$ arba $m=-3$.
Abi sąlygos kartu tenkinamos tik tada, kai $m=2$. Iš sandaugos gauta reikšmė $m=-3$ netinka: skaičiai -6 ir -2 turi sandaugą 12, bet sumą $-8\neq 7$ (jie yra $x^2+8x+12$ šaknys).
Atsakymas: $m=2$. Patikra: skaičiai 4 ir 3: $4+3=7$ ✓, $4\cdot 3=12$ ✓

25. a) $xy = x(10-x) = -x^2+10x$. Vyriausiasis koeficientas $-1<0$, todėl daugianaris įgyja didžiausią reikšmę, kai $x_e = -\frac{10}{2\cdot(-1)} = 5$; tada $y=5$ ir $xy=25$.
b) Sistema $x+y=10$, $xy=m \Leftrightarrow t^2-10t+m=0$. Šios lygties diskriminantas $D=100-4m$. Sprendinių yra, kai $D\geq 0$. $D=0$, kai $m=25$ (tada $x=y=5$). Didėjant m, D mažėja, todėl, kai $m>25$, $D<0$ ir sprendinių nėra.
Atsakymas: 25. Abiem būdais gaunamas tas pats atsakymas.

26. Atskliaudę gauname $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$, todėl $x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y)$.
Įrašome: $72 = 6^3-3xy\cdot 6 = 216-18xy$, todėl $18xy = 144$ ir $xy=8$.
Taigi x ir y yra lygties $t^2-6t+8=0$ šaknys; $D=36-32=4$, $t=\frac{6\pm2}{2}$: $t=2$ arba $t=4$.
Atsakymas: (2; 4) ir (4; 2). Patikra: $8+64=72$ ✓, $2+4=6$ ✓

27. a) $P(0)=c=12$. $P(1)=a+b+12=4$, todėl $a+b=-8$. $P(-1)=a-b+12=24$, todėl $a-b=12$. Sudėję gauname $2a=4$, $a=2$; tada $b=-10$. $P(x)=2x^2-10x+12$.
b) Padalijus iš 2, šaknys nepasikeičia: x^2-5x+6. Reikia skaičių, kurių suma 5, o sandauga 6: tai 2 ir 3. Pagal atvirkštinę teoremą tai yra šaknys (kitų nėra).
Atsakymas: $P(x) = 2x^2-10x+12$, šaknys 2 ir 3. Patikra: $P(2) = 8-20+12 = 0$ ✓, $P(3) = 18-30+12 = 0$ ✓

28. a) Daugianaris $P(x)-5 = ax^2+bx+(c-5)$ yra kvadratinis, jo šaknys 2 ir 6 (nes $P(2)-5 = P(6)-5 = 0$), todėl $P(x)-5 = a(x-2)(x-6)$. Įrašome $x=0$: $P(0)-5 = -24 = 12a$, todėl $a=-2$. Tada

$$P(x) = -2(x-2)(x-6)+5 = -2(x^2-8x+12)+5 = -2x^2+16x-19.$$

Patikra: $P(0) = -19$ ✓, $P(2) = -8 + 32 - 19 = 5$ ✓, $P(6) = -72 + 96 - 19 = 5$ ✓
b) Kadangi $P(2) = P(6)$, pagal simetriją ekstremumo taškas $x_e = \frac{2+6}{2} = 4$. Kadangi $a = -2 < 0$, tai ekstremumas yra didžiausia reikšmė: $P_{\max} = P(4) = -32 + 64 - 19 = 13$.
Atsakymas: $P(x) = -2x^2 + 16x - 19$, $x_{\max} = 4$, $P_{\max} = 13$.

29. Šaknys yra p ir q, todėl pagal Vijeto teoremą (ir atvirkštinę): $p + q = -p$ ir $pq = q$.
Antroji lygybė: $pq - q = 0$, $q(p-1) = 0$, todėl $q = 0$ arba $p = 1$.

- $q = 0$: pirmoji lygybė virsta $p = -p$, todėl $p = 0$. Daugianaris x^2, šaknys 0 ir 0 ✓
- $p = 1$: pirmoji lygybė virsta $1 + q = -1$, todėl $q = -2$. Daugianaris $x^2 + x - 2$, šaknys 1 ir -2, t. y. p ir q ✓($1 - 2 = -1 = -p$, $1 \cdot (-2) = -2 = q$).

Atsakymas: x^2 ir $x^2 + x - 2$.

30. a) $(x-a)(x-b) = c^2 \Leftrightarrow x^2 - (a+b)x + ab - c^2 = 0$. Šaknų suma $a+b$, sandauga $ab - c^2$ (Vijeto teorema).
b) Diskriminantas: $D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 = (a-b)^2 + 4c^2$. Kvadratai neneigiami, todėl $D \geq 0$ ir šaknys visada yra. $D = 0$ tik tada, kai $(a-b)^2 = 0$ ir $c^2 = 0$, t. y. $a = b$ ir $c = 0$ (tada lygtis $(x-a)^2 = 0$).
c) $(x-1)(x-5) = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 - 4 = 0$, $x^2 - 6x + 1 = 0$, $D = 36 - 4 = 32$, $x = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$.
Patikra: suma $6 = a + b$ ✓, sandauga $9 - 8 = 1 = ab - c^2 = 5 - 4$ ✓

Kvadratinis daugianaris

9 tema: kvadratinio daugianario skaidymas dauginamaisiais

1. Skaidymo formulė

Jei x_1, x_2 – daugianario ax^2+bx+c šaknys, tai

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Įrodymas (Vijeto: $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$, $\frac{c}{a}=x_1x_2$):

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}\right) && ① \\ &= a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right) && ② \\ &= a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right) && ③ \\ &= a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right) && ④ \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) && ⑤ \end{aligned}$$

① iškeliame a ② Vijeto ③ atskliaudžiame ④ grupuojame ⑤ iškeliame $(x-x_1)$

$D=0$	$a(x-x_1)^2$ $(4x^2-12x+9=(2x-3)^2)$
$D<0$	**neskaidomas** (x^2+x+1)

2. I būdas: per diskriminantą

$6x^2+11x+4$

① $D=11^2-4\cdot6\cdot4=121-96=25$

② $x_{1,2}=\frac{-11\pm5}{12}$: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{4}{3}$

③ $6x^2+11x+4=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$

④ Atsikratome trupmenų: $6=2\cdot3$ „įnešame“ į skliaustus

$$2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\cdot3\left(x+\tfrac{4}{3}\right)=\boxed{(2x+1)(3x+4)}$$

Patikra: $(2x+1)(3x+4)=6x^2+11x+4$ ✓

Tinka **visada**, kai $D\geq0$. Nepamirškite a: $2x^2-7x+3\neq(x-3)(x-\frac{1}{2})$.

Skaidymas dauginamaisiais

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

3. II būdas: vidurinio nario skaidymas

$6x^2+11x+4$

$$\begin{aligned} 6x^2+\mathbf{11}x+4 &= 6x^2+\mathbf{3}x+\mathbf{8}x+4 && ① \\ &= \underbrace{3x(2x+1)}_{6x^2+3x}+\underbrace{4(2x+1)}_{8x+4} && ② \\ &= \boxed{(3x+4)(2x+1)} && ③ \end{aligned}$$

① išskaidome vidurinį narį, ② grupuojame po du, ③ iškeliame bendrą skliaustą.

Abiejose grupėse turi atsirasti **tas pats skliaustas** $(2x+1)$.

Bet kodėl $3x+8x$**, o ne** $5x+6x$**?**
→ algoritmas 4 šakoje.

4. Kaip skaidyti vidurinį narį?

① Sudauginame kraštinius koeficientus: $a\cdot c=6\cdot4=\mathbf{24}$.

② Ieškome dviejų skaičių m ir n:

$$\boxed{m\cdot n=a\cdot c=24,\qquad m+n=b=11}$$

$m\cdot n$	$1\cdot24$	$2\cdot12$	$\mathbf{3\cdot8}$	$4\cdot6$
$m+n$	25	14	**11** ✓	10

③ Išskaidome $11x=3x+8x$ ④ grupuojame po du.

Kodėl taip yra: sandaugos $(3x+4)(2x+1)$ vidurinis narys $=3x\cdot1+4\cdot2x$, o $3\cdot8=(3\cdot2)\cdot(4\cdot1)=6\cdot4=a\cdot c$.

Ženklai: $ac<0$ – m, n priešingų ženklų; $ac>0$ – abu to paties ženklo kaip b.

5. Dar vienas pavyzdys abiem būdais: $2x^2-7x+3$

I būdas: $D=49-24=25$, $x_{1,2}=\frac{7\pm5}{4}$: 3 ir $\frac{1}{2}$

$$2(x-3)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)=(x-3)(2x-1)$$

II būdas: $ac=6$, $m+n=-7$: $m=-1$, $n=-6$

$$2x^2-x-6x+3=x(2x-1)-3(2x-1)=(x-3)(2x-1)$$

II būdas greitas, kai šaknys „gražios“; I būdas tinka visada. Kai $D<0$, daugianaris neskaidomas.

Kvadratinis daugianaris

9 tema: skaidymas dauginamaisiais – 30 užduočių

Jei $D \geq 0$ ir x_1, x_2 – šaknys: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. $D = 0$: $a(x - x_1)^2$. $D < 0$: daugianaris **neskaidomas**. **II būdas:** ieškome tokių m, n, kad $m \cdot n = a \cdot c$ ir $m + n = b$; tada rašome $ax^2 + mx + nx + c$ ir grupuojame. Tikrinkite atskliausdami.

1. Atpažink Iš skaidinio $a(x - x_1)(x - x_2)$ nurodykite a, x_1 ir x_2.

a) $2(x - 1)(x - 4)$

b) $-3(x + 2)(x - 5)$

c) $(x - 3)^2$

d) $5x(x + 4)$

2. Šaknys → skaidinys Raskite šaknis ir suskaidykite dauginamaisiais.

a) $x^2 - 7x + 10$ **b)** $x^2 + 2x - 15$ **c)** $x^2 - 9x$ **d)** $x^2 - 16$

3. Per diskriminantą Apskaičiuokite D, raskite šaknis ir suskaidykite. Atsakymą užrašykite be trupmenų, pvz. $(2x + 1)(x - 3)$.

a) $2x^2 - 5x - 3$

b) $3x^2 + 10x + 3$

c) $4x^2 - 12x + 9$

d) $6x^2 - x - 2$

4. Lentelė Užpildykite lentelę (jei daugianaris neskaidomas, parašykite „neskaidomas“).

	daugianaris	D	$x_1; x_2$	skaidinys
a)	$x^2 - x - 12$			
b)	$2x^2 + 3x - 2$			
c)	$-x^2 + x + 6$			
d)	$x^2 + 3x + 5$			

5. Rask klaidą Mokinys rašo: $2x^2 - 7x + 3$: $D = 49 - 24 = 25$, $x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, todėl $2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Kur klaida? Užrašykite teisingai ir patikrinkite atskliausdami.

6. II būdas: $a \cdot c$ Suskaidykite, vidurinį narį išskaidę į du narius (pirmiausia raskite m ir n).

a) $2x^2 + 7x + 3$

b) $3x^2 - 8x + 4$

c) $6x^2 + 7x - 3$

d) $5x^2 - 13x - 6$

7. Sugretink Kiekvienam daugianariui parinkite II būdui tinkamą porą $(m; n)$ ($mn = ac$, $m + n = b$).

A) $3x^2 + 10x + 8$

B) $2x^2 - 5x - 12$

C) $4x^2 - 11x + 6$

D) $6x^2 + x - 2$

1) $m = -3$, $n = -8$

2) $m = 4$, $n = 6$

3) $m = 4$, $n = -3$

4) $m = 3$, $n = -8$

8. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite (atskliausdami arba apskaičiuodami D).

a) Daugianaris $x^2 + x + 1$ neskaidomas.

b) $x^2 + 4 = (x+2)^2$.

c) $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$.

d) $x^2 - 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

9. Prastink Suskaidę dauginamaisiais, suprastinkite trupmenas (vardikliai nelygūs nuliui).

a) $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

b) $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

d) $\dfrac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$

10. Atvirkščiai Užrašykite kvadratinį daugianarį, kurio koeficientai sveikieji, a – mažiausias galimas natūralusis skaičius, o šaknys:

a) 2 ir 5 **b)** -3 ir $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ ir $\frac{3}{2}$

11. Tekstinis Stačiakampio plotas lygus $3x^2 + 11x + 10$ (cm^2), o vienos jo kraštinės ilgis – $x + 2$ (cm).

a) Kokiu reiškiniu užrašomas kitos kraštinės ilgis?

b) Koks stačiakampio perimetras, kai $x = 4$?

12. Su 1 tema Daugianario $P(x) = x^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = -12$ ir $P(1) = -10$. Raskite b, c ir suskaidykite $P(x)$.

13. Žinome šaknį Daugianaris $3x^2 - 10x + c$ turi šaknį 3. Raskite c, antrąją šaknį ir suskaidykite jį (be trupmenų).

14. Patikra pagal Vijeto teoremą Suskaidykite $2x^2-9x+4$. Raskite šaknis x_1, x_2 ir įsitikinkite, kad $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ bei $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Apskaičiuokite $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

15. Mintinai Suskaidę skaitiklį, apskaičiuokite be skaičiuotuvo:

a) $\dfrac{1003^2 - 5\cdot 1003 + 6}{1001}$

b) $\dfrac{2\cdot 1999^2 + 1999 - 1}{2\cdot 1999 - 1}$

16. Ekstremumas Suskaidykite $P(x) = 2x^2 - 12x + 10$. Šaknų vidurio taškas – ekstremumo taškas x_e (dėl simetrijos). Raskite x_e ir ekstremumą P_e; ar tai mažiausia, ar didžiausia reikšmė?

17. Parametras Su kuriomis p reikšmėmis daugianarį galima užrašyti pavidalu $a(x - x_1)^2$? Užrašykite jį tokiu pavidalu.

a) $x^2 + px + 25$

b) $px^2 + 12x + 9$ $(p > 0)$

18. Ar egzistuoja? Ar egzistuoja kvadratinis daugianaris $P(x)$ su sveikaisiais koeficientais, kurio šaknys 2 ir 5, o $P(0)$ lygi: a) 20; b) 15; c) -30? Jei taip – užrašykite jį.

19. Sugalvok pats Sugalvokite kvadratinį daugianarį su sveikaisiais koeficientais, kurio $a = 2$ ir $D = 81$. Suskaidykite jį dauginamaisiais.

20. Iššūkis Įrodykite: jei $D = 0$, tai $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ (pasinaudokite pilnojo kvadrato formule su D). Pritaikykite daugianariui $18x^2 - 24x + 8$.

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Neskaidomas Įrodykite, kad daugianario $x^2 + x + 1$ negalima užrašyti pavidalu $(x - p)(x - q)$ su realiaisiais p, q.

22. Koeficientai iš reikšmių Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės: $P(0) = -10$, $P(1) = -6$, $P(-1) = -8$. Raskite $P(x)$ ir suskaidykite jį be trupmenų.

23. Simetrija ir skaidymas Daugianaris $P(x) = 2x^2 + bx + c$ tenkina sąlygas $P(-1) = P(6)$ ir $P(0) = 12$. Raskite b, c ir suskaidykite $P(x)$. Patikrinkite, kad šaknų vidurio taškas sutampa su x_e.

24. Raidiniai koeficientai Suskaidykite dauginamaisiais (kintamasis x, $a \neq 0$):

a) $x^2 - 5ax + 6a^2$ **b)** $3x^2 + 10ax + 3a^2$

25. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis daugianarį $x^2 + 2mx + 3m + 4$ galima užrašyti pavidalu $a(x - x_1)^2$? Užrašykite juos tokiu pavidalu.

26. Pirminiai skaičiai Su kuriais natūraliaisiais n skaičius $n^2 - 5n + 6$ yra pirminis?

27. Gudriai Pažymėję $t = x^2$, suskaidykite į tiesinius dauginamuosius:

a) $x^4 - 10x^2 + 9$ **b)** $x^4 - 13x^2 + 36$

28. Prastinimas su parametru Su kuriomis a reikšmėmis trupmena $\dfrac{x^2 + ax + 6}{x^2 - x - 2}$ prastinama? Kiekvienu atveju suprastinkite.

29. Sveikosios šaknys Raskite visus sveikuosius b, su kuriais $x^2 + bx + 12 = (x - p)(x - q)$, kur p ir q yra sveikieji skaičiai.

30. Iššūkis Daugianario $x^2 + bx + c$ koeficientai sveikieji.

a) Įrodykite: jei jis turi sveikąją šaknį, tai ir antroji šaknis sveika.

b) Įrodykite: jei b ir c nelyginiai, tai sveikųjų šaknų jis neturi.

Atsakymai

1. a) $a = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. b) $a = -3$; -2 ir 5. c) $a = 1$; $x_1 = x_2 = 3$. d) $a = 5$; 0 ir -4.

2. a) $(x-2)(x-5)$. b) $(x-3)(x+5)$. c) $x(x-9)$. d) $(x-4)(x+4)$.

3. a) $D = 49$; $(x-3)(2x+1)$. b) $D = 64$; $(3x+1)(x+3)$. c) $D = 0$; $(2x-3)^2$. d) $D = 49$; $(3x-2)(2x+1)$.

4. a) 49; 4; -3; $(x-4)(x+3)$. b) 25; $\frac{1}{2}$; -2; $(2x-1)(x+2)$. c) 25; -2; 3; $-(x+2)(x-3)$. d) $D = -11$; neskaidomas.

5. Pamirštas koeficientas $a = 2$: $2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-3)(2x-1)$.

6. a) $(2x+1)(x+3)$. b) $(3x-2)(x-2)$. c) $(3x-1)(2x+3)$. d) $(5x+2)(x-3)$.

7. A–2, B–4, C–1, D–3.

8. a) T. b) K. c) T. d) K.

9. a) $\frac{x+3}{x-2}$. b) $\frac{2x-1}{x-1}$. c) $\frac{x-2}{x+1}$. d) $\frac{3x+2}{x+2}$.

10. a) $x^2-7x+10$. b) $2x^2+5x-3$. c) $6x^2-11x+3$.

11. a) $3x+5$ (cm). b) 46 cm.

12. $b = 1$, $c = -12$; $(x-3)(x+4)$.

13. $c = 3$; antroji šaknis $\frac{1}{3}$; $(x-3)(3x-1)$.

14. $(2x-1)(x-4)$; $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_1 + x_2 = \frac{9}{2}$, $x_1x_2 = 2$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9}{4}$.

15. a) 1000. b) 2000.

16. $2(x-1)(x-5)$; $x_e = 3$; $P_e = -8$ (mažiausia reikšmė).

17. a) $p = \pm 10$: $(x+5)^2$ arba $(x-5)^2$. b) $p = 4$: $(2x+3)^2$.

18. a) Taip: $2x^2-14x+20$. b) Ne. c) Taip: $-3x^2+21x-30$.

19. Pvz. $2x^2+x-10 = (2x+5)(x-2)$ arba $2x^2+3x-9 = (2x-3)(x+3)$.

20. Įrodymas: $ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a}$. $18x^2-24x+8 = 2(3x-2)^2$.

21. Įrodymas – žr. sprendimus.

22. $P(x) = 3x^2+x-10 = (3x-5)(x+2)$.

23. $b = -10$, $c = 12$; $P(x) = 2(x-2)(x-3)$.

24. a) $(x-2a)(x-3a)$. b) $(3x+a)(x+3a)$.

25. $m = 4$: $(x+4)^2$; $m = -1$: $(x-1)^2$.

26. $n = 1$ ir $n = 4$ (abiem atvejais skaičius lygus 2).

27. a) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. b) $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.

28. $a = -5$: $\frac{x-3}{x+1}$; $a = 7$: $\frac{x+6}{x-2}$.

29. $b = \pm 7; \pm 8; \pm 13$.

30. Įrodymas – žr. sprendimus.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Tarkime priešingai: $x^2 + x + 1 = (x - p)(x - q)$ su visais x. Atskliauskite ir palyginkite koeficientus – kokią lygtį gausite su p?

22. Iš $P(0)$ iškart gaunate c. Iš $P(1)$ ir $P(-1)$ sudarykite sistemą $a + b = \ldots$, $a - b = \ldots$.

23. Dviejų taškų, kuriuose reikšmės lygios, vidurys – $x_e = -\frac{b}{2a}$. Kam lygūs x_e ir b?

24. Raskite D (gausite reiškinio su a kvadratą) ir šaknis; su a elkitės kaip su skaičiumi.

25. Sąlyga $D = 0$ duoda lygtį su m; išspręskite ją pagal atvirkštinę Vijeto teoremą.

26. Suskaidykite $n^2 - 5n + 6$. Kada dviejų sveikųjų dauginamųjų sandauga yra pirminis skaičius?

27. Daugianarį $t^2 - 10t + 9$ suskaidykite kaip įprastą kvadratinį daugianarį su kintamuoju t, tada vietoj t vėl įrašykite x^2 ir pasinaudokite kvadratų skirtumu $x^2 - k^2$.

28. Suskaidykite vardiklį. Trupmena prastinama, kai skaitiklis dalijasi iš kurio nors vardiklio dauginamojo, t. y. turi tą pačią šaknį.

29. Atskliauskite $(x - p)(x - q)$ ir palyginkite su $x^2 + bx + 12$: kam lygūs pq ir $-b$? Išvardykite visas skaičiaus 12 daliklių poras.

30. a) Pasinaudokite Vijeto teorema: $x_1 + x_2 = -b$. b) Dviejų sveikųjų skaičių suma nelyginė – koks jų lyginumas? Ką tada galima pasakyti apie $x_1 x_2 = c$?

Sprendimai (21–30)

21. Tarkime, kad su visais x galioja $x^2+x+1=(x-p)(x-q)=x^2-(p+q)x+pq$. Palyginame koeficientus:

$$p+q=-1, \qquad pq=1.$$

Iš pirmosios lygybės $q=-1-p$; įrašome į antrąją: $p(-1-p)=1$, t. y. $p^2+p+1=0$. Šios lygties $D=1-4=-3<0$, todėl tokio realiojo p nėra (atvirkštinė Vijeto teorema: sistema sprendinių neturi). **Išvada:** taip užrašyti negalima – daugianaris neskaidomas.

22. Iš $P(0)=c$: $c=-10$. $P(1)=a+b-10=-6$, todėl $a+b=4$. $P(-1)=a-b-10=-8$, todėl $a-b=2$. Sudėję: $2a=6$, $a=3$; tada $b=1$. $P(x)=3x^2+x-10$. Skaidome: $D=1+120=121$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm11}{6}$: $x_1=\frac{5}{3}$, $x_2=-2$. $P(x)=3\big(x-\frac{5}{3}\big)(x+2)=(3x-5)(x+2)$. **Atsakymas:** $3x^2+x-10=(3x-5)(x+2)$. Patikra: $(3x-5)(x+2)=3x^2+6x-5x-10$ ✓

23. $P(0)=c=12$. Kadangi $P(-1)=P(6)$, ekstremumo taškas yra šių taškų vidurys: $x_e=\frac{-1+6}{2}=\frac{5}{2}$. Antra vertus, $x_e=-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{4}$, todėl $-\frac{b}{4}=\frac{5}{2}$, $b=-10$. $P(x)=2x^2-10x+12$; $D=100-96=4$, $x_{1,2}=\frac{10\pm2}{4}$: 3 ir 2. $P(x)=2(x-2)(x-3)$. Šaknų vidurys $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}=x_e$ ✓ Patikra: $P(-1)=2+10+12=24$, $P(6)=72-60+12=24$ ✓

24. a) $D=25a^2-24a^2=a^2$. $x_{1,2}=\frac{5a\pm a}{2}$: $x_1=3a$, $x_2=2a$. Koeficientas prie x^2 lygus 1, todėl $x^2-5ax+6a^2=(x-2a)(x-3a)$. Patikra: $x^2-3ax-2ax+6a^2$ ✓
b) $D=100a^2-36a^2=64a^2$. $x_{1,2}=\frac{-10a\pm8a}{6}$: $-\frac{a}{3}$ ir $-3a$. $3x^2+10ax+3a^2=3\big(x+\frac{a}{3}\big)(x+3a)=(3x+a)(x+3a)$. Patikra: $3x^2+9ax+ax+3a^2$ ✓

25. Daugianarį $x^2+2mx+3m+4$ galima užrašyti pavidalu $a(x-x_1)^2$ tada ir tik tada, kai $D=0$:

$$D=(2m)^2-4(3m+4)=4m^2-12m-16=4(m^2-3m-4).$$

$m^2-3m-4=0$. Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą $m_1+m_2=3$, $m_1m_2=-4$, todėl $m=4$ arba $m=-1$. $m=4$: $x^2+8x+16=(x+4)^2$. $m=-1$: $x^2-2x+1=(x-1)^2$. ✓

26. $n^2-5n+6=(n-2)(n-3)$ (šaknys 2 ir 3).

- $n=2$ ir $n=3$: sandauga lygi 0 – ne pirminis.
- $n=1$: $(-1)(-2)=2$ – pirminis. $n=4$: $2\cdot1=2$ – pirminis.
- $n\geq5$: abu dauginamieji $n-2\geq3$ ir $n-3\geq2$ didesni už 1, todėl skaičius sudėtinis.

Atsakymas: $n=1$ ir $n=4$.

27. a) $t=x^2$: $t^2-10t+9$, $D=100-36=64$, $t=\frac{10\pm8}{2}$: 9 ir 1. Taigi $(t-1)(t-9)=(x^2-1)(x^2-9)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$.
b) $t^2-13t+36$, $D=169-144=25$, $t=\frac{13\pm5}{2}$: 9 ir 4. $(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.
Patikra: $(x^2-1)(x^2-9)=x^4-10x^2+9$ ✓

28. Vardiklis: x^2-x-2, $D=9$, šaknys 2 ir -1: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. Trupmena prastinama tik tada, kai skaitiklis turi šaknį 2 arba -1.

- Šaknis 2: $4+2a+6=0$, $a=-5$. Tada $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ir trupmena lygi $\frac{x-3}{x+1}$.
- Šaknis -1: $1-a+6=0$, $a=7$. Tada $x^2+7x+6=(x+1)(x+6)$ ir trupmena lygi $\frac{x+6}{x-2}$.

Atsakymas: $a=-5$ arba $a=7$. Patikra: $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$ ✓, $(x+1)(x+6)=x^2+7x+6$ ✓

29. Atskliaudę $(x-p)(x-q)=x^2-(p+q)x+pq$, gauname $pq=12$ ir $b=-(p+q)$. Skaičiaus 12 skaidiniai į sveikuosius dauginamuosius (dauginamųjų tvarka nesvarbi):

$\{p;q\}$	$\{1;12\}$	$\{2;6\}$	$\{3;4\}$	$\{-1;-12\}$	$\{-2;-6\}$	$\{-3;-4\}$
$b=-(p+q)$	-13	-8	-7	13	8	7

Atsakymas: $b=\pm7;\pm8;\pm13$. Patikra: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ ✓

30. a) Tarkime, x_1 – sveikoji šaknis. Kadangi šaknis yra, $D \geq 0$ ir galioja Vijeto teorema: $x_1 + x_2 = -b$. Todėl $x_2 = -b - x_1$ – sveikųjų skaičių skirtumas, t. y. sveikasis skaičius.
b) Tarkime, kad yra sveikoji šaknis x_1. Pagal a dalį antroji šaknis x_2 irgi sveikoji. Pagal Vijeto teoremą $x_1 + x_2 = -b$ – nelyginis skaičius, todėl vienas iš x_1, x_2 lyginis, kitas nelyginis, tad $x_1 x_2 = c$ lyginis. Bet c nelyginis – prieštaravimas. **Išvada:** sveikųjų šaknų nėra.

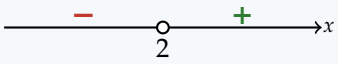
Kvadratinis daugianaris

10 tema: kvadratinio daugianario ženklai

1. Pagrindai

Dauginamojo $x - t$ ženklas: neigiamas, kai $x < t$; 0, kai $x = t$; teigiamas, kai $x > t$.

Pvz. $x - 2$:



Ženklų tiesė: + – teigiamas, − – neigiamas visame intervale; ○ – šaknis (reiškinys lygus 0).

Sandaugos ženklas: $(+)(+) = +$, $(-)(-) = +$, $(+)(-) = -$.

Griežta ir negriežta nelygybė (šaknys $x_1 < x_2$):

$P(x) > 0$, $P(x) < 0$	šaknys **neįeina**: $(x_1; x_2)$
$P(x) \geq 0$, $P(x) \leq 0$	šaknys **įeina**: $[x_1; x_2]$

Prie $\pm\infty$ – visada apvalūs skliaustai: $(-\infty; x_1]$.

2. Pavyzdys, kai $a > 0$: $P(x) = x^2 - 5x + 4$

Šaknys 1 ir 4: $P(x) = (x - 1)(x - 4)$.

	$x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
$x - 1$	−	+	+
$x - 4$	−	−	+
$P(x)$	+	−	+



$P(x) > 0$: $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$

$P(x) \geq 0$: $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

$P(x) < 0$: $x \in (1; 4)$

$P(x) \leq 0$: $x \in [1; 4]$

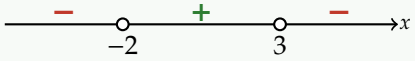
Patikra: $P(0) = 4 > 0$, $P(2) = -2 < 0$ ✓

Kvadratinio daugianario ženklai

Už šaknų – a **ženklas**, tarp šaknų – **priešingas**; $\geq, \leq$ – šaknys **įeina**

3. Pavyzdys, kai $a < 0$: $P(x) = -x^2 + x + 6$

Šaknys -2 ir 3: $P(x) = -(x + 2)(x - 3)$.
Kaip 2 šakoje, tik minusas visus ženklus pakeičia **priešingais**:



$P(x) > 0$: $x \in (-2; 3)$

$P(x) \geq 0$: $x \in [-2; 3]$

$P(x) < 0$: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

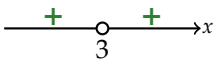
$P(x) \leq 0$: $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$

Patikra: $P(0) = 6 > 0$, $P(5) = -14 < 0$ ✓

4. Viena šaknis arba šaknų nėra

1 atvejis: $D = 0$ (viena šaknis)

$P(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$



$P(x) > 0$: $x \neq 3$, t. y. $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

$P(x) \geq 0$: visi x

$P(x) < 0$: sprendinių **nėra**

$P(x) \leq 0$: tik $x = 3$

2 atvejis: $D < 0$ (šaknų nėra)

$P(x) = x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 > 0$

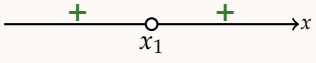
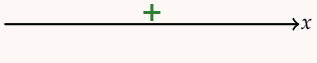
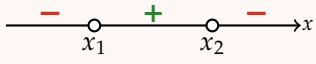
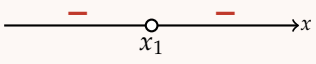


$P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$: visi x

$P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$: sprendinių **nėra**

Kai $a < 0$ – ženklai priešingi (žr. 5 šaką).

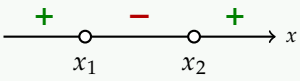
5. Apibendrinimas: ženklą lemia a ir D

	$D > 0$ (dvi šaknys)	$D = 0$ (viena šaknis)	$D < 0$ (šaknų nėra)
$a > 0$			
$a < 0$			

Algoritmas: ① randame šaknis (arba įsitikiname, kad $D < 0$) ② brėžiame ženklų tiesę pagal a ženklą ③ atrenkame intervalus; kai nelygybė **griežta** ($>, <$) – **pridedame šaknis**.

Kvadratinis daugianaris

10 tema: kvadratinio daugianario ženklai – 30 užduočių

Už šaknų $x_1 < x_2$ – a ženklas, tarp šaknų – **priešingas**: 

$(a > 0)$.

$P(x) > 0$, $P(x) < 0$ – šaknys **neįeina**: $(x_1; x_2)$. $P(x) \geq 0$, $P(x) \leq 0$ – šaknys **įeina**: $[x_1; x_2]$. Prie $\pm\infty$ – visada apvalūs skliaustai. $D = 0$: $P = a(x - x_1)^2$; $D < 0$: ženklas visur toks pat kaip a.

1. Atpažink Duotas reiškinys $(x-2)(x+3)$. Kokio ženklo (+, − ar 0) yra kiekvienas dauginamasis ir visa sandauga, kai

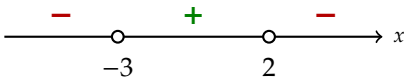
a) $x = -5$; **b)** $x = 0$; **c)** $x = 2$; **d)** $x = 7$?

2. Lentelė Duotas daugianaris $P(x) = (x+2)(x-4)$. Užpildykite ženklų lentelę, nubraižykite ženklų tiesę ir užrašykite, kada $P(x) > 0$ ir kada $P(x) < 0$.

	$x < -2$	$-2 < x < 4$	$x > 4$
$x + 2$			
$x - 4$			
$P(x)$			

3. Intervalai Užrašykite intervalu arba intervalų sąjunga:

a) $x \geq 3$ **b)** $x < -1$ **c)** $-2 \leq x < 5$ **d)** $x \neq 0$

4. Skaityk ženklų tiesę Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ ženklų tiesė: 

a) Kokio ženklo yra a?

b) Išspręskite $P(x) > 0$ ir $P(x) \leq 0$.

c) Kuris iš skaičių $P(-4)$; $P(0)$; $P(5)$ yra teigiamas?

5. Skaidyk ir spręsk Išskaidykite kairiąją pusę dauginamaisiais ir išspręskite nelygybę:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$ **c)** $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - x - 12 < 0$ **d)** $x^2 - 9 \leq 0$

6. Sugretink Kiekvienai nelygybei parinkite jos sprendinių aibę.

A) $x^2 - 4 > 0$	1) $(-2; 2)$
B) $x^2 - 4 < 0$	2) $[-2; 2]$
C) $x^2 - 4 \geq 0$	3) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
D) $x^2 - 4 \leq 0$	4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

7. Rask klaidą Mokinys sprendžia $x^2 - 3x - 4 \leq 0$: „Šaknys -1 ir 4, daugianario $a > 0$, tarp šaknų ženklas neigiamas, todėl atsakymas $x \in (-1; 4)$.“ Kur klaida? Užrašykite teisingą atsakymą.

8. Rask klaidą Mokinys sprendžia $(x-1)(x-5) > 0$: „Sandauga teigiama, todėl $x - 1 > 0$ ir $x - 5 > 0$, taigi $x > 5$.“ Kurią sprendinių aibės dalį jis pamiršo? Išspręskite teisingai.

9. Teisinga ar klaidinga? Pagrįskite.

a) Jei $a > 0$ ir $D > 0$, tai už šaknų $P(x) > 0$.
b) Nelygybė $x^2 + 1 < 0$ turi sprendinių.
c) Nelygybė $(x-2)^2 \geq 0$ teisinga su visais x.
d) Nelygybė $(x-2)^2 > 0$ teisinga su visais x.
e) Nelygybė $-x^2 - 3 < 0$ teisinga su visais x.

10. Pagal D ir a Apskaičiuokite D ir, šaknų neieškodami, nustatykite, ar daugianaris visada teigiamas, visada neigiamas, ar keičia ženklą:

a) $x^2 + 4x + 5$
b) $-x^2 + 2x - 3$
c) $2x^2 + x - 1$
d) $-3x^2 + 6x - 3$

11. Viena šaknis arba nė vienos Išspręskite:

a) $x^2 - 4x + 4 > 0$
b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$
c) $x^2 + x + 1 > 0$
d) $-x^2 + 2x - 5 \geq 0$

12. Pilnasis kvadratas Išskirkite pilnąjį kvadratą ir pagrįskite, kad nelygybė teisinga su visais x:

a) $x^2 - 4x + 5 > 0$ **b)** $x^2 + 10x + 26 > 0$ **c)** $-x^2 + 2x - 3 < 0$

13. Kai $a < 0$ Išspręskite (pirmiausia pertvarkykite, kad koeficientas prie x^2 būtų teigiamas):

a) $-x^2 + 4x - 3 > 0$
b) $-x^2 - x + 6 \geq 0$
c) $-2x^2 + 8 < 0$
d) $3x - x^2 \leq 0$

14. Nepilnosios nelygybės Išspręskite be šaknų formulės (iškelkite x prieš skliaustus arba pasinaudokite kvadratų skirtumu):

a) $x^2 - 7x < 0$
b) $x^2 \geq 16$
c) $2x^2 - 8x > 0$
d) $4x^2 \leq 1$

15. Sveikieji sprendiniai Raskite visus sveikuosius skaičius, tenkinančius nelygybę:

a) $x^2 - 2x - 8 < 0$
b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

16. Daugianaris iš ženklų Raskite daugianarį:

a) $P(x) = x^2 + bx + c$; $P(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$, ir $P(x) < 0$, kai $x \in (1; 5)$.
b) $P(x) = -x^2 + bx + c$; $P(x) \geq 0$ tik tada, kai $x \in [-2; 3]$.

17. Sugalvok pats Sugalvokite kvadratinę nelygybę su x^2 (užrašykite ją standartiniu pavidalu), kurios sprendinių aibė yra:

a) $[-1; 4]$
b) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
c) $\{5\}$ (vienintelis skaičius)
d) sprendinių nėra

18. Parametras Raskite visas p reikšmes, su kuriomis:

a) nelygybė $x^2 + 4x + p > 0$ teisinga su visais x;
b) nelygybė $x^2 - 6x + p \leq 0$ turi bent vieną sprendinį.

19. Tekstinis Stačiakampio viena kraštinė lygi x cm, kita $-x+3$ cm. Su kuriomis x reikšmėmis stačiakampio plotas mažesnis už 40 cm^2?

20. Tekstinis Dviejų skaičių suma lygi 10. Su kuriomis pirmojo skaičiaus x reikšmėmis jų sandauga didesnė už 21?

Sunkesnės užduotys (21–30) – čia reikės paprakaituoti: ieškokite idėjos, pagrįskite kiekvieną žingsnį.

21. Parametras Su kuriomis m reikšmėmis nelygybė $mx^2 - 4x + m < 0$ teisinga su visais x?

22. Iš ženklų į daugianarį Daugianario $P(x) = ax^2 + bx + c$ ženklai tokie: $P(x) \geq 0$ tik tada, kai $x \in [-2;3]$, o $P(0) = 12$.

a) Raskite $P(x)$.

b) Išspręskite nelygybę $P(x) > 12$.

23. Simetrija ir ženklai Daugianaris $P(x) = x^2 + bx + c$ tenkina sąlygą $P(-1) = P(5)$, o jo mažiausia reikšmė lygi -16.

a) Raskite $P(x)$.

b) Išspręskite $P(x) \leq 0$ ir $P(x) > 9$.

24. Sistema Išspręskite nelygybių sistemą ir atsakymą užrašykite intervalu: $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0. \end{cases}$

25. Neieškok šaknų! Duota lygtis $x^2 - 7x + 3 = 0$.

a) Šaknų neieškodami, įrodykite, kad ji turi dvi šaknis ir abi jos teigiamos.

b) Kiek sveikųjų skaičių yra tarp jos šaknų $x_1 < x_2$? Išvardykite juos. (Šaknų ieškoti nereikia.)

26. Parametras ir Vijeto teorema Su kuriomis m reikšmėmis lygtis $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ turi šaknų ir visos jos teigiamos?

27. Gudriai Išspręskite nelygybę $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$. (Pažymėkite $t = x^2$.)

28. Ar egzistuoja? Nelygybės $P(x) > 0$, kur $P(x) = ax^2 + bx + c$, sprendinių aibė yra intervalas $(1;3)$.

a) Ar gali būti $P(0) = 3$?

b) Ar gali būti $P(0) = -6$? Jei taip, raskite $P(x)$.

29. Įrodymas Duotas daugianaris $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ir skaičius m, su kuriuo $a \cdot P(m) < 0$ (a ir $P(m)$ skirtingų ženklų). Įrodykite, kad

a) $D > 0$;

b) m yra tarp šaknų, t. y. $x_1 < m < x_2$.

30. Iššūkis Nelygybės $x^2 + bx + c < 0$ sprendinių aibė yra intervalas, kurio ilgis lygus 6.

a) Raskite mažiausią daugianario $x^2 + bx + c$ reikšmę.

b) Raskite b ir c, jei dar žinoma, kad šio intervalo vidurio taškas yra 2.

Atsakymai

1. a) $-$, $-$; $+$. b) $-$, $+$; $-$. c) 0, $+$; 0. d) $+$, $+$; $+$.

2. Ženklai: $x+2$: $-++$; $x-4$: $--+$; P: $+-+$. $P>0$: $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$; $P<0$: $(-2;4)$.

3. a) $[3;+\infty)$. b) $(-\infty;-1)$. c) $[-2;5)$. d) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

4. a) $a<0$. b) $P>0$: $(-3;2)$; $P\le 0$: $(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$. c) $P(0)$.

5. a) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. b) $(-3;4)$. c) $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. d) $[-3;3]$.

6. A–3, B–1, C–4, D–2.

7. Šaknys įeina: $[-1;4]$.

8. Pamiršo atvejį, kai abu dauginamieji neigiami. Teisingai: $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

9. a) T. b) K. c) T. d) K ($x=2$ netinka). e) T.

10. a) $D=-4$, visada teigiamas. b) $D=-8$, visada neigiamas. c) $D=9$, keičia ženklą. d) $D=0$, niekada nebūna teigiamas (≤ 0; lygus 0 tik tada, kai $x=1$).

11. a) $x\neq 2$. b) $x=-3$. c) visi x. d) sprendinių nėra.

12. a) $(x-2)^2+1$. b) $(x+5)^2+1$. c) $-(x-1)^2-2$.

13. a) $(1;3)$. b) $[-3;2]$. c) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. d) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

14. a) $(0;7)$. b) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. c) $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. d) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

15. a) $-1;0;1;2;3$ (5 skaičiai). b) nuo -2 iki 4 (7 skaičiai).

16. a) x^2-6x+5. b) $-x^2+x+6$.

17. Pvz. a) $x^2-3x-4\le 0$. b) $(x-2)^2>0$. c) $(x-5)^2\le 0$. d) $x^2+1<0$.

18. a) $p>4$. b) $p\le 9$.

19. $0<x<5$.

20. $3<x<7$.

21. $m<-2$.

22. a) $P(x)=-2x^2+2x+12$. b) $(0;1)$.

23. a) $x^2-4x-12$. b) $[-2;6]$; $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$.

24. $(-2;-1]$.

25. a) Įrodymas – žr. sprendimus. b) 6 skaičiai: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

26. $m\ge 3$.

27. $(-2;-1)\cup(1;2)$.

28. a) Ne. b) Taip: $P(x)=-2x^2+8x-6$.

29. Įrodymas – žr. sprendimus.

30. a) -9. b) $b=-4$, $c=-5$.

Užuominos sunkesnėms užduotims (21–30)

Pirmiausia pabandykite be užuominų. Užuominą skaitykite tik tada, kai tikrai užstrigote.

21. Kai $m = 0$, nelygybė tampa tiesine. Kai $m \neq 0$ ir $D < 0$, ženklas visur toks pat kaip $a = m$. Koks turi būti m ženklas?

22. Iš sprendinių aibės nustatykite šaknis ir tai, ar $a > 0$, ar $a < 0$. Tada $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, o a rasite iš $P(0)$.

23. Iš $P(-1) = P(5)$ raskite ekstremumo tašką h. Tada $P(x) = (x - h)^2 + k$.

24. Kiekvieną nelygybę išspręskite atskirai (ženklų tiese), tada raskite abiejų sprendinių aibių bendrąją dalį.

25. Rasti šaknų nereikia: jų ženklus nustatysite iš $x_1 + x_2$ ir $x_1 x_2$ (kai $D \geq 0$). O ką reiškia $P(n) < 0$ šaknų atžvilgiu, kai $a > 0$?

26. Reikia trijų sąlygų: $D \geq 0$, $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$. Raskite m, tenkinančius visas tris.

27. Pažymėję $t = x^2$, gausite kvadratinę nelygybę su t. Paskui grįžkite prie x: $x^2 > 1$ ir $x^2 < 4$.

28. Jei daugianaris teigiamas tik intervale $(1; 3)$, kokio ženklo turi būti a? Užrašykite $P(x) = a(x-1)(x-3)$ ir susiekite a su $P(0)$.

29. Išskirkite pilnąjį kvadratą daugianariui $a \cdot P(x)$ (ne $P(x)$!) ir išreikškite jį per D.

30. Kaip $x_2 - x_1$ susijęs su D? Išreikškite $(x_2 - x_1)^2$ per $x_1 + x_2$ ir $x_1 x_2$.

Sprendimai (21–30)

21. Jei $m = 0$, nelygybė tampa $-4x < 0$, t. y. $x > 0$ – ne su visais x. Todėl $m \neq 0$.
Kai $m \neq 0$, daugianario ženklas su visais x toks pat kaip $a = m$ tada ir tik tada, kai $D < 0$. Reikia neigiamo ženklo, todėl $m < 0$ ir $D < 0$.
$D = (-4)^2 - 4 \cdot m \cdot m = 16 - 4m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow m < -2$ arba $m > 2$.
Kadangi $m < 0$, lieka $m < -2$.
Patikra: $m = -3$: $-3x^2 - 4x - 3$, $D = 16 - 36 < 0$, $a < 0$ ✓.
Atsakymas: $m < -2$.

22. a) Nelygybė $P(x) \geq 0$ teisinga tik intervale $[-2; 3]$ – tarp šaknų ženklas priešingas a ženklui, todėl $a < 0$, o šaknys yra -2 ir 3: $P(x) = a(x + 2)(x - 3)$.
Iš $P(0) = 12$: $a \cdot 2 \cdot (-3) = 12$, $a = -2$ (neigiamas, kaip ir turi būti).
$P(x) = -2(x + 2)(x - 3) = -2(x^2 - x - 6) = -2x^2 + 2x + 12$.
b) $-2x^2 + 2x + 12 > 12 \Rightarrow -2x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow x(x - 1) < 0$ (padalijome iš -2 ir pakeitėme nelygybės ženklą priešingu). Šaknys 0 ir 1, $a > 0$, ženklas neigiamas tarp šaknų.
Patikra: $P(0{,}5) = 12{,}5 > 12$ ✓.
Atsakymas: a) $-2x^2 + 2x + 12$; b) $x \in (0; 1)$.

23. a) Kadangi $P(-1) = P(5)$, tai $h = \frac{-1+5}{2} = 2$. Mažiausia reikšmė -16 (nes $a = 1 > 0$): $P(x) = (x-2)^2 - 16 = x^2 - 4x - 12$.
b) $P(x) \leq 0$: $(x-2)^2 \leq 16$, arba išskaidome: $P(x) = (x-2)^2 - 16 = (x-2-4)(x-2+4) = (x-6)(x+2) \leq 0$. Šaknys -2 ir 6, ženklas neigiamas tarp jų, o $\leq$ – šaknys įeina: $[-2; 6]$.
$P(x) > 9$: $(x - 2)^2 > 25$, $x^2 - 4x - 21 > 0$, $(x - 7)(x + 3) > 0$. Šaknys -3 ir 7, ženklas teigiamas už šaknų (nelygybė griežta – šaknys neįeina).
Patikra: $P(0) = -12 < 0$, $0 \in [-2; 6]$ ✓; $P(8) = 16 > 9$ ✓.
Atsakymas: a) $x^2 - 4x - 12$; b) $[-2; 6]$ ir $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$.

24. Pirmoji nelygybė: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) < 0$, šaknys -2 ir 3, ženklas neigiamas tarp jų: $(-2; 3)$.
Antroji nelygybė: $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) \geq 0$, šaknys -1 ir 4, ženklas teigiamas už šaknų, šaknys įeina: $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
Sistemos sprendiniai turi tenkinti abi nelygybes – ieškome bendrosios dalies. Iš $(-2; 3)$ tinka tik ta dalis, kuri yra ≤ -1 (nes $[4; +\infty)$ nepatenka į $(-2; 3)$): $(-2; -1]$.
Patikra: $x = -1$: $1 + 1 - 6 = -4 < 0$, $1 + 3 - 4 = 0 \geq 0$ ✓; $x = -1{,}5$: $2{,}25 + 1{,}5 - 6 < 0$ ir $2{,}25 + 4{,}5 - 4 > 0$ ✓.
Atsakymas: $x \in (-2; -1]$.

25. a) $D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 37 > 0$ – dvi šaknys. Pagal Vijeto teoremą $x_1 + x_2 = 7 > 0$ ir $x_1 x_2 = 3 > 0$. Sandauga teigiama, taigi šaknys vienodo ženklo, o suma teigiama – abi teigiamos.
b) $P(x) = x^2 - 7x + 3$, $a = 1 > 0$, todėl $P(x) < 0$ tik tarp šaknų. $P(1) = 1 - 7 + 3 = -3 < 0$ ir $P(6) = 36 - 42 + 3 = -3 < 0$, taigi 1 ir 6 yra intervale $(x_1; x_2)$ – kartu ir visi sveikieji skaičiai tarp jų: 1; 2; 3; 4; 5; 6. $P(0) = 3 > 0$ ir $P(7) = 49 - 49 + 3 = 3 > 0$ – skaičiai 0 ir 7 jau už šaknų; $x_1 > 0$ (iš a dalies), todėl sveikieji skaičiai ≤ 0 taip pat už šaknų, o 7 yra už šaknų ir didesnis už vidinį tašką 6, todėl ir visi skaičiai ≥ 7 yra už šaknų.
Atsakymas: b) 6 skaičiai: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

26. Reikia, kad šaknys būtų ($D \geq 0$) ir abi būtų teigiamos (pagal Vijeto teoremą: $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$).
$D = (2m)^2 - 4(m + 6) = 4m^2 - 4m - 24 = 4(m - 3)(m + 2) \geq 0$: $m \leq -2$ arba $m \geq 3$.
$x_1 + x_2 = 2m > 0 \Rightarrow m > 0$.
$x_1 x_2 = m + 6 > 0 \Rightarrow m > -6$.
Bendroji dalis: $m \geq 3$.
Patikra: $m = 3$: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, šaknis $3 > 0$ ✓; $m = 4$: $x^2 - 8x + 10$, šaknys $4 \pm \sqrt{6} > 0$ ✓.
Atsakymas: $m \geq 3$.

27. Pažymime $t = x^2$ ($t \geq 0$): $t^2 - 5t + 4 < 0$, $(t - 1)(t - 4) < 0$, todėl $1 < t < 4$, t. y. $1 < x^2 < 4$.
$x^2 > 1$: $x < -1$ arba $x > 1$. $x^2 < 4$: $-2 < x < 2$.

Bendroji dalis: $-2 < x < -1$ arba $1 < x < 2$.
Patikra: $x = 1{,}5$: $5{,}0625 - 11{,}25 + 4 < 0$ ✓; $x = 0$: $4 > 0$, $x = 3$: $81 - 45 + 4 > 0$ ✓.
Atsakymas: $(-2;-1) \cup (1;2)$.

28. $P(x) > 0$ tik intervale $(1;3)$ – tarp šaknų ženklas priešingas a ženklui, todėl $a < 0$, šaknys 1 ir 3: $P(x) = a(x-1)(x-3)$, $P(0) = 3a$.
a) $P(0) = 3$ duoda $a = 1 > 0$ – prieštarauja tam, kad $a < 0$. **Ne**, negali.
b) $P(0) = -6$ duoda $a = -2 < 0$ – tinka. $P(x) = -2(x-1)(x-3) = -2x^2 + 8x - 6$.
Patikra: $P(2) = -8 + 16 - 6 = 2 > 0$ ✓; $P(0) = -6$, $P(4) = -32 + 32 - 6 < 0$ ✓.
Atsakymas: a) ne; b) taip, $-2x^2 + 8x - 6$.

29. Išskirkime pilnąjį kvadratą daugianariui $a \cdot P(x)$:
$a \cdot P(x) = a^2x^2 + abx + ac = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ac = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}$.
a) Jei $D \le 0$, tai $a \cdot P(m) = \left(am + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{D}{4} \ge 0$ – prieštarauja sąlygai $a \cdot P(m) < 0$. Taigi $D > 0$.
b) Vadinasi, yra dvi šaknys $x_1 < x_2$ ir $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Tada $a \cdot P(m) = a^2(m - x_1)(m - x_2) < 0$. Kadangi $a^2 > 0$, tai $(m - x_1)(m - x_2) < 0$, o sandauga neigiama tik tada, kai dauginamieji skirtingų ženklų: $m - x_1 > 0$ ir $m - x_2 < 0$, t. y. $x_1 < m < x_2$. ■

30. a) Jei $P(x) = x^2 + bx + c < 0$ intervale $(x_1; x_2)$, tai x_1, x_2 – šaknys ($D > 0$), o ilgis $x_2 - x_1 = 6$.
$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-b)^2 - 4c = b^2 - 4c = D$ (pagal Vijeto teoremą).
Todėl $D = 36$. Mažiausia reikšmė (nes $a = 1 > 0$): $P_e = -\frac{D}{4a} = -\frac{36}{4} = -9$.
b) Intervalo vidurio taškas $\frac{x_1+x_2}{2} = 2$, taigi $x_1 + x_2 = 4 = -b$, $b = -4$. Be to, $x_2 - x_1 = 6$, todėl $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. $c = x_1x_2 = -5$.
Patikra: $P(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) < 0$ tik intervale $(-1;5)$, ilgis 6 ✓; $P(2) = -9$ ✓.
Atsakymas: a) -9; b) $b = -4$, $c = -5$.